

2015年医学部第2問

1枚目 / 2枚

2 数列 $\{a_n\}$ を

$$\begin{cases} a_1 = 2\sqrt{2}, \\ a_n > 0, \quad a_1^{\frac{1}{n}} a_2^{\frac{1}{n}} \cdots a_{n-1}^{\frac{1}{n}} a_n^{\frac{2}{n}} = 8 \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

で定めるとき、次の問いに答えよ。

- (1) $b_n = \log_2 a_n$ とおくとき、数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。
- (2) $c_n = a_1 a_2 \cdots a_n$ とおくとき、数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) $10^k \leq c_{11} < 10^{k+1}$ となる整数 k を求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

(1) $a_n > 0$ より、 $a_1^{\frac{1}{n}} a_2^{\frac{1}{n}} \cdots a_{n-1}^{\frac{1}{n}} a_n^{\frac{2}{n}} = 8$ の両辺、底が2の対数をとって、

$$\frac{1}{n} \log_2 a_1 + \frac{1}{n} \log_2 a_2 + \cdots + \frac{1}{n} \log_2 a_{n-1} + \frac{2}{n} \log_2 a_n = 3$$

$$\therefore \frac{1}{n} (b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + 2b_n) = 3$$

$$\therefore b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + 2b_n = 3n \quad \cdots ①$$

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + b_n + 2b_{n+1} = 3(n+1) \quad \cdots ②$$

$$② - ① \text{ より, } 2b_{n+1} - b_n = 3 \quad (n \geq 2)$$

$$\therefore b_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}(b_n - 3)$$

∴ 数列 $\{b_n - 3\}$ は第2項が $b_2 - 3 = \frac{9}{4} - 3 = -\frac{3}{4}$ 、

公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列 ∴ $b_n - 3 = -\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\therefore b_n = 3 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} \quad \text{これは } n=1 \text{ のときも成り立つ}$$

$$a_1 = 2^{\frac{3}{2}} \text{ より, } b_1 = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} n=2 \text{ を代入して,} \\ a_1^{\frac{1}{2}} \cdot a_2^{\frac{1}{2}} = 8 \end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt[4]{8} \cdot a_2 = 8$$

$$\therefore a_2 = 8^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{9}{4}}$$

$$\therefore b_2 = \frac{9}{4}$$

(2) $C_n = a_1 a_2 \cdots a_n$ の両辺、底が2の対数をとって、

$$\log_2 C_n = \log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \cdots + \log_2 a_n$$

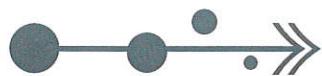
$$= b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

$$= \sum_{k=1}^n 3 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \right\}$$

$$= 3n - 3 \cdot \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 3 \left\{ n - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}$$

$$\therefore C_n = \underline{2^{3 \left\{ n - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}}} \quad //$$



2015年 医学部 第2問

2枚目/2枚

2 数列 $\{a_n\}$ を

$$\begin{cases} a_1 = 2\sqrt{2}, \\ a_n > 0, \quad a_1^{\frac{1}{n}} a_2^{\frac{1}{n}} \cdots a_{n-1}^{\frac{1}{n}} a_n^{\frac{2}{n}} = 8 \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

で定めるとき、次の問いに答えよ。

- (1) $b_n = \log_2 a_n$ とおくとき、数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。
- (2) $c_n = a_1 a_2 \cdots a_n$ とおくとき、数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) $10^k \leq c_{11} < 10^{k+1}$ となる整数 k を求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

(3) (2)より $c_{11} = 2^{30 + \frac{3}{2^{11}}}$

$$\therefore 10^k \leq c_{11} < 10^{k+1} \Leftrightarrow k \leq \log_{10} c_{11} < k+1$$

であることから、

$$k \leq (30 + \frac{3}{2^{11}}) \cdot \log_{10} 2 < k+1$$

$$\text{ここで, } 30 \cdot 0.3010 < (30 + \frac{3}{2^{11}}) \cdot \log_{10} 2 < 31 \cdot 0.3010$$

$$\text{すなわち, } 9.03 < (30 + \frac{3}{2^{11}}) \log_{10} 2 < 9.331$$

$$\therefore \underline{k=9} \quad //$$