広島市立大学

2013年 第4問

$\boxed{4}$ 曲線 $y=e^{2x}$ を C とする．C の接線で原点を通るものを ℓ_1 とし，C と ℓ_1 の接点Pにおける C の法線を ℓ_2 とする．以下の問いに答えよ．

(1) 直線 ℓ_1 の方程式，および点Pの座標を求めよ．

(2) 直線 ℓ_2 の方程式，および直線 ℓ_2 と y 軸の交点Qの座標を求めよ．

(3) 次の問いに答えよ．

(i) 部分積分法を用いて不定積分 $\int \log x\,dx$，$\int (\log x)^2\,dx$ を求めよ．

(ii) 曲線 C，直線 ℓ_2 および y 軸で囲まれる領域を y 軸のまわりに1回転して得られる立体の体積を求めよ．

(1) 接点を (t, e^{2t}) とすると，$y' = 2e^{2x}$ より 接線は.

$$y = 2e^{2t}(x-t) + e^{2t}$$

これが原点を通ることから，$0 = e^{2t}\cdot(1-2t)$　$e^{2t}>0$ より $t=\frac{1}{2}$　$\therefore \underline{\ell_1 : y = 2ex}$ //

また，接点は $\underline{P\left(\frac{1}{2}, e\right)}$ //

(2) ℓ_1 の傾きが $2e$ より，ℓ_2 の傾きは，$-\frac{1}{2e}$

$\therefore \ell_2 : y = -\frac{1}{2e}\left(x-\frac{1}{2}\right)+e$　　$\therefore \underline{\ell_2 : y = -\frac{x}{2e}+\frac{1}{4e}+e}$ //　$\underline{Q\left(0, \frac{1}{4e}+e\right)}$ //

(3)
(i) $\int \log x\,dx = \int (x)'\log x\,dx$

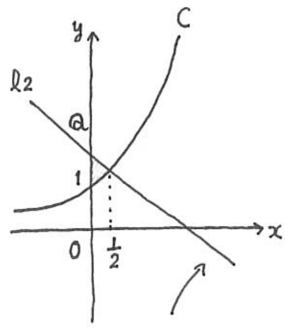
$= \underline{x\log x - x + C}$ //　(Cは積分定数)

$\int (\log x)^2 dx = \int (x)'(\log x)^2 dx$

$= x(\log x)^2 - \int 2x\cdot\frac{1}{x}\cdot\log x\,dx$

$= x(\log x)^2 - 2(x\log x - x) + C$　(上の結果より)

$= \underline{x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + C}$ //　(Cは積分定数)



$\ell_2 \Leftrightarrow x = -2ey + \frac{1}{2} + 2e^2$

$x = \frac{1}{2}\log y$ より.

(ii) $V = \pi\int_1^e \left(\frac{1}{2}\log y\right)^2 dy + \pi\int_e^{e+\frac{1}{4e}}\left(-2ey+\frac{1}{2}+2e^2\right)^2 dy$

$= \frac{\pi}{4}\Big[y(\log y)^2 - 2y\log y + 2y\Big]_1^e + \pi\int_0^{\frac{1}{4e}}\left(-2ey+\frac{1}{2}\right)^2 dy$

$= \frac{\pi}{4}(e-2e+2e-2) + \pi\left[-\frac{1}{2e}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-2ey+\frac{1}{2}\right)^3\right]_0^{\frac{1}{4e}} = \underline{\pi\left(\frac{e}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{48e}\right)}$ //