

2016年第1問

1 次の問いに答えよ。

(1) 関数  $y = \frac{2x+5}{x+2}$  ( $0 \leq x \leq 2$ ) の逆関数を求めよ。また、その定義域を求めよ。

(2) 次の関数の導関数を求めよ。

$$y = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{\sin x}}$$

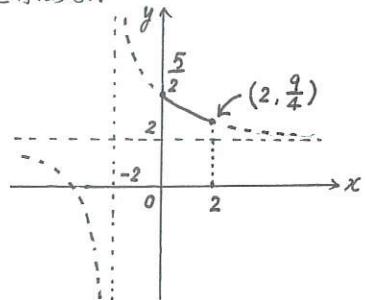
$$\begin{aligned} (1) \quad y &= \frac{2(x+2)+1}{x+2} \\ &= \frac{1}{x+2} + 2 \end{aligned}$$

(3) 次の不定積分、定積分を求めよ。

(i)  $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$

 $0 \leq x \leq 2$  のとき右図より

$\frac{9}{4} \leq y \leq \frac{5}{2}$



(ii)  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{(2x+1)^2} dx$

 $x$  と  $y$  を入れかえて

$x = \frac{1}{y+2} + 2 \quad (\frac{9}{4} \leq x \leq \frac{5}{2})$

$\therefore y = -\frac{2x-5}{x-2} \quad (\frac{9}{4} \leq x \leq \frac{5}{2})$

$$\begin{aligned} (2) \quad y' &= \frac{(e^{\frac{x}{2}})' \sqrt{\sin x} - e^{\frac{x}{2}} (\sqrt{\sin x})'}{\sin x} \\ &= \frac{\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \sqrt{\sin x} - e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}}{\sin x} \\ &= \frac{e^{\frac{x}{2}} (\sin x - \cos x)}{2 \sin x \sqrt{\sin x}} \end{aligned}$$

(i)  $t = \sin x$  において置換積分する。 $dt = \cos x dx$ 

$(\text{与式}) = \int \frac{1-t^2}{t^2} dt$

$= \int t^{-2} - 1 dt$

$= -t^{-1} - t + C$

$= -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C \quad (C \text{ は積分定数})$

(ii)  $t = 2x+1$  において置換積分する。 $dt = 2 dx$ ,  $\frac{x}{t} \parallel \frac{0 \rightarrow \frac{1}{2}}{1 \rightarrow 2}$ 

$(\text{与式}) = \int_1^2 \frac{t-1}{2t^2} \cdot \frac{1}{2} dt$

$= \int_1^2 \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t^2} dt$

$= \left[ \frac{1}{4} \log|t| + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t} \right]_1^2$

$= \frac{1}{4} \log 2 + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{8} (2 \log 2 - 1)$