

2011年第2問

2 $f(x) = e^{-x} \cos x$ とする.

(1) $e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x$ を微分せよ.

(2) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ を求めよ.

(3) 自然数 n に対して,

$$S_n = \frac{1}{n} \left\{ f\left(\frac{\pi}{2n}\right) + f\left(\frac{2\pi}{2n}\right) + f\left(\frac{3\pi}{2n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n\pi}{2n}\right) \right\}$$

とおく. 次の式が成り立つことを示せ.

$$S_n < \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx < S_n + \frac{1}{n}$$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ.