

2016年 第1問

1 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = \frac{2x+5}{x+2}$ ($0 \leq x \leq 2$) の逆関数を求めよ。また、その定義域を求めよ。

(2) 次の関数の導関数を求めよ。

$$y = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{\sin x}}$$

(3) 次の不定積分、定積分を求めよ。

(i) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$

(ii) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{(2x+1)^2} dx$

$$\begin{aligned} (2) y' &= \frac{(e^{\frac{x}{2}})' \sqrt{\sin x} - e^{\frac{x}{2}} (\sqrt{\sin x})'}{\sin x} \\ &= \frac{\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \sqrt{\sin x} - e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}}{\sin x} \\ &= \frac{e^{\frac{x}{2}} (\sin x - \cos x)}{2 \sin x \sqrt{\sin x}} \quad // \end{aligned}$$

(i) $t = \sin x$ において置換積分する。 $dt = \cos x dx$

(与式) $= \int \frac{1-t^2}{t^2} dt$

$= \int t^{-2} - 1 dt$

$= -t^{-1} - t + C$

$= -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C$ (C は積分定数) //

(ii) $t = 2x+1$ において置換積分する。 $dt = 2 dx$, $\left. \begin{matrix} x=0 \rightarrow \frac{1}{2} \\ x=\frac{1}{2} \rightarrow 2 \end{matrix} \right\} t$

(与式) $= \int_1^2 \frac{t-1}{2t^2} \cdot \frac{1}{2} dt$

$= \int_1^2 \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t^2} dt$

$= \left[\frac{1}{4} \log |t| + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t} \right]_1^2$

$= \frac{1}{4} \log 2 + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} (1) y &= \frac{2(x+2)+1}{x+2} \\ &= \frac{1}{x+2} + 2 \end{aligned}$$

 $0 \leq x \leq 2$ のとき右図より

$\frac{9}{4} \leq y \leq \frac{5}{2}$

 x と y を入れかえて

$x = \frac{1}{y+2} + 2 \quad \left(\frac{9}{4} \leq x \leq \frac{5}{2} \right)$

$\therefore y = -\frac{2x-5}{x-2} \quad \left(\frac{9}{4} \leq x \leq \frac{5}{2} \right) //$

