0002227272777999

広島市立大学

2016年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 関数 $f(x) = x - \log x$ $(x > 0)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の増減，極値と，曲線 $y = f(x)$ の凹凸を調べよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(e,\ f(e))$ における接線を ℓ とする．

(i) ℓ の方程式を求めよ．

(ii) 曲線 $y = f(x)$，接線 ℓ および直線 $x = 1$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

(3) 曲線 $y = f(x)$，曲線 $y = \log x$，直線 $x = 1$ および直線 $x = e$ で囲まれた部分を x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積を求めよ．

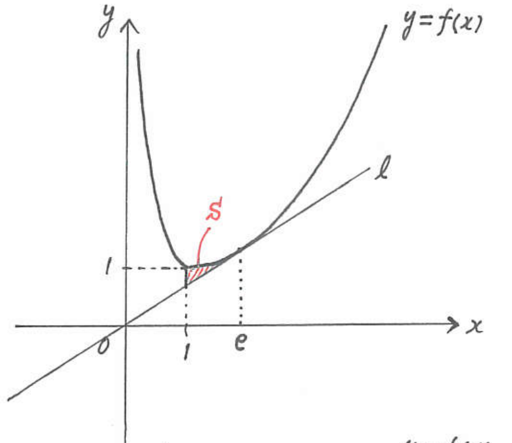
(1) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, $f''(x) = \frac{1}{x^2}$

よって増減表は次のようになる.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$	
$f''(x)$	/	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	(∞)	$\searrow$	1	$\nearrow$	

$\lim_{x \to +0} f(x) = \infty$

したがって, グラフは右のようになる.



(2) (i) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ より

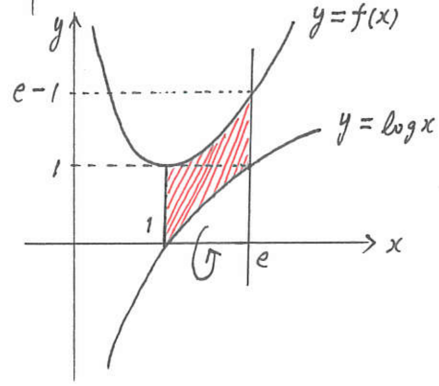
$\ell : y = (1 - \frac{1}{e})(x - e) + e - 1$

$\therefore\ \underline{\ell : y = (1 - \frac{1}{e})x}$ //

(ii) $S = \int_1^e x - \log x - (1 - \frac{1}{e})x\, dx$

$= \left[\frac{x^2}{2e} - x\log x\right]_1^e + \int_1^e dx$

$= \underline{\frac{e}{2} - \frac{1}{2e} - 1}$ //



(3) $V = \pi\int_1^e (x - \log x)^2 - (\log x)^2\, dx$

$= \pi\int_1^e x^2 - 2x\log x\, dx$

$= \pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e - \pi\int_1^e (x^2)'\log x\, dx$

$= \left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\right)\pi - \pi\left[x^2\log x\right]_1^e$

$+ \pi\int_1^e x\, dx$

$= \frac{e^3-1}{3}\pi - e^2\pi + \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e$

$= \underline{\frac{2e^3 - 3e^2 - 5}{6}\pi}$ //