0001341278568999

電気通信大学

2013年 第2問

$\boxed{2}$ 関数 $y=\dfrac{e^x}{e^x+e^{-x}}$ について以下の問いに答えよ．

(1) 定積分 $I=\displaystyle\int_{-1}^{1} y\,dx$ を求めよ．

以下では，n は自然数とする．

(2) $I_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{-n}^{n} y\,dx$ を求めよ．

(3) $J_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{-n}^{n} y(1-y)\,dx$ を求めよ．

(4) $K_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{-n}^{n} y^2\,dx$ とおくとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}K_n$ を求めよ．

(1) $t=e^x$ とおくと $dt=e^x dx$，$\begin{array}{c|c} x & -1\to 1 \\ \hline t & \frac{1}{e}\to e \end{array}$

$$\therefore I=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{1}{t+\frac{1}{t}}\,dt$$

$$=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{2t}{t^2+1}\cdot\frac{1}{2}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\log(t^2+1)\Big]_{\frac{1}{e}}^{e}$$

$$=\underline{1}\,/\!/$$

(2) (1)と同様に $t=e^x$ とおくと．

$$I_n=\int_{e^{-n}}^{e^n}\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{t^2+1}\,dt\times\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\log(t^2+1)\Big]_{e^{-n}}^{e^n}\times\frac{1}{n}$$

$$=\underline{1}\,/\!/$$

(3) $J_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{-n}^{n} y-y^2\,dx=I_n-\dfrac{1}{n}\int_{-n}^{n}y^2\,dx$

ここで，$\displaystyle\int_{-n}^{n}y^2\,dx=\int_{-n}^{n}\frac{e^{2x}}{e^{2x}+e^{-2x}+2}\,dx$

$$=\int_{e^{-2n}}^{e^{2n}}\frac{1}{2}\cdot\frac{dt}{t+\frac{1}{t}+2}$$

$$=\int_{e^{-2n}}^{e^{2n}}\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+2t+1}\,dt$$

$$=\int_{e^{-2n}+1}^{e^{2n}+1}\frac{1}{2u}-\frac{1}{2}\cdot u^{-2}\,du$$

$$=\left[\frac{1}{2}\log|u|+\frac{1}{2u}\right]_{e^{-2n}+1}^{e^{2n}+1}$$

$$=n-\frac{e^{2n}-1}{2(e^{2n}+1)}$$

$$\therefore J_n=1-\frac{1}{n}\left(n-\frac{e^{2n}-1}{2(e^{2n}+1)}\right)$$

$$=\underline{\frac{e^{2n}-1}{2n(e^{2n}+1)}}\,/\!/$$

(4) $K_n=I_n-J_n$ より

$$\lim_{n\to\infty}K_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{e^{2n}-1}{2n(e^{2n}+1)}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1-\frac{1}{e^{2n}}}{2n\cdot\left(1+\frac{1}{e^{2n}}\right)}\right)$$

$$=\underline{1}\,/\!/$$