

2013年第17問



17 赤いカードが6枚、白いカードが2枚入っている箱の中から、カード1枚取り出し、色を記録してから、取り出したカードをもとの箱に戻すことを10回続けて行うこととする。8回以上赤いカードが出る確率を p 、8回以上白いカードが出る確率を q としたとき、 $\frac{109p}{7q} \times 3^{-8}$ の値を求めよ。

8回以上赤いカードが出る確率は、

$$\begin{aligned}
 p &= \left(\frac{3}{4}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot {}_{10}C_2 + \left(\frac{3}{4}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot {}_{10}C_1 + \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \\
 &= \left(\frac{3}{4}\right)^8 \left\{ \frac{45}{16} + \frac{30}{16} + \frac{9}{16} \right\} \\
 &= \left(\frac{3}{4}\right)^8 \cdot \frac{21}{4}
 \end{aligned}$$

8回以上白いカードが出る確率は、

$$\begin{aligned}
 q &= \left(\frac{1}{4}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot {}_{10}C_2 + \left(\frac{1}{4}\right)^9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) \cdot {}_{10}C_1 + \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \\
 &= \left(\frac{1}{4}\right)^8 \left\{ \frac{9 \times 45}{16} + \frac{30}{16} + \frac{1}{16} \right\} \\
 &= \left(\frac{1}{4}\right)^8 \cdot \frac{109}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{109p}{7q} \times 3^{-8} &= \frac{109}{7} \times \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^8 \cdot \frac{21}{4}}{\left(\frac{1}{4}\right)^8 \cdot \frac{109}{4}} \times 3^{-8} \\
 &= \frac{109}{7} \times \frac{3^8 \times 21}{109} \times 3^{-8} \\
 &= \underline{\underline{3}} //
 \end{aligned}$$