



2013年 理工学部 第4問

4 k を実数とする. 関数 $f(x) = (k - \cos x)(k - \sin x)$ ($0 \leq x \leq \pi$) が $x = \frac{\pi}{2}$ で極値をとるとする.

- (1) k の値を求めよ.
 (2) 関数 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ.
 (3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸が囲む図形の面積を求めよ.

$$\begin{aligned} (1) f'(x) &= (k - \cos x)'(k - \sin x) + (k - \cos x)(k - \sin x)' \\ &= \sin x (k - \sin x) - \cos x (k - \cos x) \\ &= k(\sin x - \cos x) + \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ で極値をとることから, } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\therefore k - 1 = 0 \quad \therefore \underline{k = 1} \quad \leftarrow \text{逆にこのとき, } x = \frac{\pi}{2} \text{ で極値をとることを示さないといけないが,}$$

今回は (2) でそれを示すことにする.

$$\begin{aligned} (2) (1) \text{ より, } f'(x) &= \sin x - \cos x - (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) \\ &= (\sin x - \cos x)(1 - \sin x - \cos x) \end{aligned}$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ より, } 0 \leq x \leq \pi \text{ で } \sin x - \cos x = 0 \text{ となるのは, } x = \frac{\pi}{4}$$

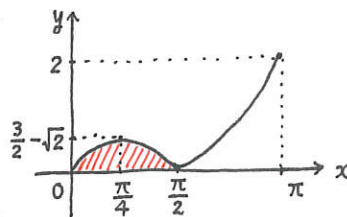
$$1 - \sin x - \cos x = 1 - \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ より.}$$

$$1 - \sin x - \cos x = 0 \iff \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore x = 0, \frac{\pi}{2}$$

x	0	...	$\frac{\pi}{4}$...	$\frac{\pi}{2}$...	π
$f'(x)$	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	\nearrow		\searrow	0	\nearrow	2

$$\frac{3}{2} - \sqrt{2}$$

↑ 極値をとっている.



\therefore 増減表は上のようになり, グラフは右上のようになる.

$$\begin{aligned} (3) S &= \int_0^{\pi/2} (1 - \cos x)(1 - \sin x) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} 1 - \sin x - \cos x + \frac{1}{2} \sin 2x dx \\ &= \left[x + \cos x - \sin x - \frac{1}{4} \cos 2x \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{1}{4} - \left(1 - \frac{1}{4}\right) \\ &= \underline{\underline{\frac{\pi - 3}{2}}} \end{aligned}$$