



2014年工学部・生命環境(生命工)第5問

数理解  
石井K5 曲線Cは媒介変数 $t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ )によって、 $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$ と表される。

- (1)  $x$ は $t$ の関数として増加関数であることを示せ。  
 (2)  $0 < t < 2\pi$ のとき、 $\frac{dy}{dx}$ を $t$ を用いた式で表せ。また、 $y$ の $x$ に関する増減を調べよ。  
 (3) 不定積分 $\int \cos^2 t dt$ および $\int \cos^3 t dt$ を求めよ。  
 (4) 曲線Cと $x$ 軸で囲まれた図形を $x$ 軸の周りに1回転させてできる回転体の体積を求めよ。

$$(1) \frac{dx}{dt} = 1 - \cos t \quad (0 \leq t \leq 2\pi \text{ より } -1 \leq \cos t \leq 1 \text{ であるから } \frac{dx}{dt} \geq 0)$$

$\therefore x$ は $t$ の関数として増加関数  $\square$

$$(2) \frac{dy}{dt} = \sin t \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

$\therefore y$ は  $0 < t < \pi$  のとき増加,  $\pi < t < 2\pi$  のとき減少

すなわち、 $0 < x < \pi$  で増加,  $\pi < x < 2\pi$  で減少

$$\left( \sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t + C \right) \text{ での正解}$$

$$(3) \int \cos^2 t dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$\int \cos^3 t dt = \int \frac{\cos 3t + 3\cos t}{4} dt = \frac{1}{12} \sin 3t + \frac{3}{4} \sin t + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

3倍角の公式  $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$  より。

$$(4) V = \pi \int_0^{2\pi} y^2 dx$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \frac{dx}{dt} \cdot dt$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} 1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t dt$$

$$= \pi \left[ t - 3\sin t + \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}\sin 2t - \frac{1}{12}\sin 3t - \frac{3}{4}\sin t \right]_0^{2\pi} = 5\pi^2$$

$x$	0	...	$\pi$	...	$2\pi$
$\frac{dy}{dx}$	0	+	0	-	0
$y$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

