学習院大学

2016年 文学部 第4問

石井

$\boxed{4}$ 放物線 $C: y = x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ を通り，P における C の接線と直交する直線を L とする．ただし，t は正の実数とする．

(1) L の方程式を求めよ．

(2) L と C とで囲まれた部分の面積を S とする．t が正の実数全体を動くとき，S の最小値と，最小値を与える t の値を求めよ．

(1) $y' = 2x$ より，P における C の接線の傾きは $2t$

よって，L の傾きは $-\frac{1}{2t}$ であるから，$L: y = -\frac{1}{2t}(x-t)+t^2$

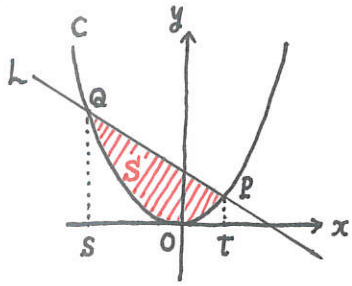
すなわち，$L: y = -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2}$ //

(2) C と L の交点で P 以外のものを Q とし，Q の x 座標を s とおくと，

$$x^2 - \left(-\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2}\right) = 0 \iff x^2 + \frac{1}{2t}x - t^2 - \frac{1}{2} = 0$$

この方程式は $x = t,\ s$ を解にもつ．解と係数の関係より，

$$t + s = -\frac{1}{2t} \qquad \therefore\ s = -t - \frac{1}{2t} \cdots ①$$



右のグラフより，

$$S = \int_s^t -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2} - x^2\,dx$$

$$= -\int_s^t (x-s)(x-t)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}(t-s)^3$$

$$= \frac{1}{6}\left(2t + \frac{1}{2t}\right)^3 \quad (\because ①より)$$

$t > 0$ より，相加・相乗平均の関係から，$2t + \frac{1}{2t} \geqq 2\sqrt{2t\cdot\frac{1}{2t}} = 2$

(等号成立は，$t = \frac{1}{2}$ のとき)

よって，$S \geqq \frac{1}{6}\cdot 2^3 = \frac{4}{3}$

$\therefore$ S の最小値は $\frac{4}{3}$ で，そのときの t の値は $t = \frac{1}{2}$ //