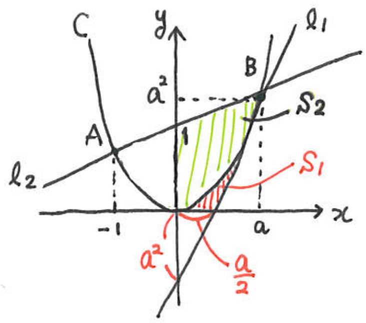
茨城大学

2014年 第3問

$\boxed{3}$ 放物線 $y=x^2$ を C として，C 上に点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$ をとる．正の実数 a に対して，点 $\mathrm{B}(a,\ a^2)$ における C の接線を ℓ_1 とし，2点A，Bを通る直線を ℓ_2 とする．また，C と ℓ_1 および x 軸とで囲まれた図形の面積を S_1 とし，C と ℓ_2 で囲まれた図形の $x \geqq 0$ の部分の面積を S_2 とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 接線 ℓ_1 の方程式を求めよ．

(2) $2 < \dfrac{S_2}{S_1} < 2.01$ を満たすための a の条件を求めよ．



(1) $y' = 2x$ より．$\ell_1 : y = 2a(x-a) + a^2$

$\therefore\ \underline{\ell_1 : y = 2ax - a^2}$ //

(2) $S_1 = \int_0^a x^2 - (2ax - a^2)\,dx - \frac{1}{2}\cdot a^2 \cdot \frac{a}{2}$

$= \int_0^a (x-a)^2\,dx - \frac{1}{4}a^3$

$= \left[\frac{1}{3}(x-a)^3\right]_0^a - \frac{1}{4}a^3$

$= \frac{1}{12}a^3$

$\ell_2 : y = \frac{a^2-1}{a+1}(x+1) + 1 \qquad \therefore\ y = (a-1)x + a$

$\therefore\ S_2 = \int_0^a (a-1)x + a - x^2\,dx$

$= \left[\frac{1}{2}(a-1)x^2 + ax - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a$

$= \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{2}a^2$

$\therefore\ 2 < \frac{S_2}{S_1} < 2.01 \iff 2 < \dfrac{\frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{2}a^2}{\frac{1}{12}a^3} < 2.01$

$\iff 2 < \frac{2a+6}{a} < 2.01$

$\iff 2a < 2a + 6 < 2.01a$

$\iff 6 < 0.01a \iff \underline{a > 600}$ //