0000146633589999

横浜国立大学

2010年 第1問　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 実数 a に対し，関数

$$f(x) = \cos 2x + 4a\cos x + 2a + 5$$

を考える．$f(x)$ の最小値を $m(a)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $f(x) = 0$ が解をもたないような a の範囲を求めよ．

(2) (1) で求めた範囲の a について，$m(a)$ を求めよ．

(3) a が (1) で求めた範囲を動くとき，$m(a)$ の最大値を求めよ．また，そのときの a の値を求めよ．

(4) (3) で求めた a に対し，$f(x) = m(a)$ となる x の値を求めよ．

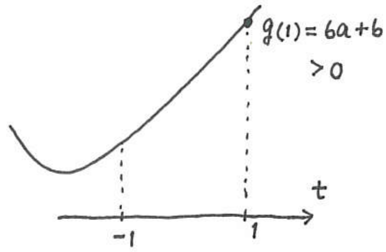
(1) $f(x) = 2\cos^2 x + 4a\cos x + 2a + 4$

$t = \cos x$ とおいて $(-1 \leqq t \leqq 1)$，$f(x)$ を t で表したものを $g(t)$ とすると．

$g(t) = 2t^2 + 4at + 2a + 4$

$g(t) = 0$ が $-1 \leqq t \leqq 1$ において解をもたなければよい

$g(t) = 2(t+a)^2 - 2a^2 + 2a + 4$

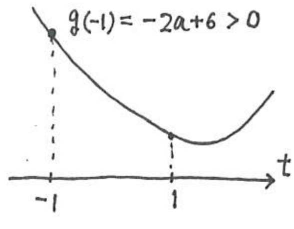


(i) $a > 1$ のとき．

(i). $-a < -1$ すなわち $a > 1$ のとき．

$g(1) = 6a + 6 > 0$ なので，$g(-1) = -2a + 6 > 0$ となればよい．

$\therefore\ a < 3$　場合分けの条件とあわせて．$1 < a < 3$



(ii) $a < -1$ のとき．

(ii) $-a > 1$　すなわち　$a < -1$ のとき．

$g(-1) = -2a + 6 > 0$ なので．$g(1) = 6a + 6 > 0$ となればよい

$\therefore\ a > -1$　これは条件に反し．不適．

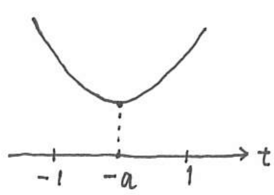
(iii) $-1 \leqq a \leqq 1$ のとき．

$g(-a) = -2a^2 + 2a + 4 > 0$ となればよい

$\therefore\ a^2 - a - 2 < 0$

$(a-2)(a+1) < 0$

$\therefore\ -1 < a < 2$　$\therefore$ 場合分けの条件とあわせて．$-1 < a \leqq 1$



(iii) $-1 \leqq a \leqq 1$ のとき．

(i)〜(iii) より．$\underline{-1 < a < 3}$ //

2枚目へつづく

2010年 第1問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 実数 a に対し，関数

$$f(x) = \cos 2x + 4a\cos x + 2a + 5$$

を考える．$f(x)$ の最小値を $m(a)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $f(x)=0$ が解をもたないような a の範囲を求めよ．

(2) (1) で求めた範囲の a について，$m(a)$ を求めよ．

(3) a が (1) で求めた範囲を動くとき，$m(a)$ の最大値を求めよ．また，そのときの a の値を求めよ．

(4) (3) で求めた a に対し，$f(x)=m(a)$ となる x の値を求めよ．

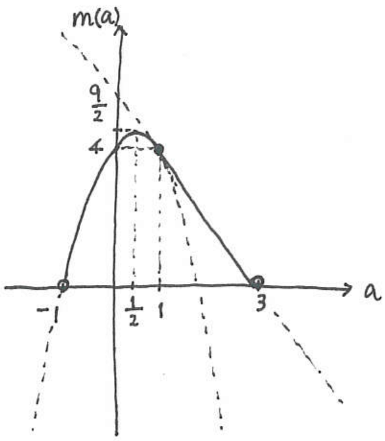
(2) (1)の場合分けより．

$1<a<3$ のとき．$m(a)=g(-1)=-2a+6$

$-1<a\leqq 1$ のとき　　$m(a)=g(-a)=-2a^2+2a+4$

$$\therefore\ m(a)=\begin{cases}-2a+6 & (1<a<3\ のとき)\\ -2a^2+2a+4 & (-1<a\leqq 1\ のとき)\end{cases}$$ //

(3) $y=m(a)$ のグラフをかくと右のようになる．



$\therefore$ 最大値は，$\frac{9}{2}$ $\left(a=\frac{1}{2}\ のとき\right)$ //

(4) $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{2}$ より．$g(t)=\frac{9}{2}$ を考えると．

$a=\frac{1}{2}$ なので，$2t^2+2t+\frac{1}{2}=0$

$\therefore\ 4t^2+4t+1=0$　　$\therefore\ (2t+1)^2=0$

$\therefore\ t=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ \cos x=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ x=\pm\frac{2}{3}\pi+2n\pi$ （nは整数） //