

2017年第3問

3 原点を中心とする半径3の球面を S とする. 球面 S 上に点 $P(a, b, c)$ を $a > 0, b > 0, c > 0$ となるようにとり, 以下の条件をみたす直方体 T を考える.

- 直方体 T は点 P を頂点のひとつにもつ.
- 直方体 T は球面 S に内接する.
- 直方体 T の各辺は x 軸, y 軸, z 軸のいずれかに平行である.
- 直方体 T の表面積は64である.

このとき, 直方体 T の x 軸, y 軸, z 軸に平行な辺の長さは, それぞれ $2a, 2b, 2c$ である. 以下の問いに答えよ.

- (1) $ab + bc + ca$ と $a + b + c$ の値をそれぞれ求めよ.
- (2) 関数

$$f(t) = t^3 - (a + b + c)t^2 + (ab + bc + ca)t$$

の増減を調べ, その極値を求めよ.

- (3) 直方体 T の体積を V とする. 式 $(t - a)(t - b)(t - c)$ を $f(t)$ と V を用いて表せ.
- (4) 体積 V のとりうる値の範囲を求めよ.
- (5) 体積 V が最小となる点 $P(a, b, c)$ のうちで, $a \leq b \leq c$ をみたす点 P の座標を求めよ.