岩手大学

2016年 理工学部 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ 関数 $F(x)$ と連続関数 $f(t)$ の関係が

$$F(x)=\int_{-x}^{x} f(t)\,dt$$

で与えられるとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(t)=e^t-e^{-t}$ のとき，$F(x)$ を求めよ．

(2) 2つの連続関数 $g(t)$，$h(t)$ において，$g(-t)=g(t)$，$h(-t)=-h(t)$ が常に成り立つとする．$f(t)=g(t)+h(t)$ とするとき，$F'(x)$ を求めよ．

(3) $f(t)=t^2-1+(e^t-e^{-t})\cos t$ のとき，$x>0$ における $F(x)$ の最小値を求めよ．

(1) $F(x)=\int_{-x}^{x} e^t-e^{-t}\,dt$ ← e^t-e^{-t} が奇関数であることに気づけば直接 0 と答えてよい（奇関数であることは書いておこう）

$=\left[e^t+e^{-t}\right]_{-x}^{x}$

$=e^x+e^{-x}-(e^{-x}+e^x)$

$=\underline{0}$ //

(2) $F(x)=\int_{-x}^{x} \underbrace{g(t)}_{偶関数}+\underbrace{h(t)}_{奇関数}\,dt$

$=2\int_0^x g(t)\,dt \quad \cdots (*)$

$\therefore \underline{F'(x)=2g(x)}$ //

(3) $g(t)=t^2-1$，$h(t)=(e^t-e^{-t})\cos t$ とおくと．

$g(-t)=g(t)$，$h(-t)=-h(t)$

$\therefore$ (2)より．$F'(x)=2g(x)=2(x-1)(x+1)$

右の増減表より

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$F'(x)$		$-$	0	$+$
$F(x)$		↘		↗

最小値は $F(1)=2\int_0^1 t^2-1\,dt$ （∵(*)より）

$=2\left[\frac{t^3}{3}-t\right]_0^1$

$=\underline{-\frac{4}{3}}$ //