



2016年 理学部 (数学) 第1問

数理
石井K

1 次の問いに答えよ。

(1) 1次不定方程式 $17x + 22y = 1$ の整数解をすべて求めよ。(2) 2次方程式 $x^2 + Ax + B = 0$ の2つの解 α, β は

$$a \neq 0, \quad \beta \neq 0, \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 2, \quad \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} = 3$$

を満たすとする。このとき、 A, B の値を求めよ。(3) 関数 $y = x^{\sqrt{x}}$ ($x > 0$) の導関数を求めよ。

(1) ユークリッドの互除法より

$$22 = 17 \times 1 + 5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$17 = 5 \times 3 + 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$5 = 2 \times 2 + 1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \text{ より } 1 = 5 - 2 \times 2$$

$$= 5 - (17 - 5 \times 3) \times 2 \quad (\because \textcircled{2} \text{ より})$$

$$= 5 \times 7 - 17 \times 2$$

$$= (22 - 17 \times 1) \times 7 - 17 \times 2 \quad (\because \textcircled{1} \text{ より})$$

$$= 17 \cdot (-9) + 22 \cdot 7$$

$$\text{よって, } 17 \cdot (-9) + 22 \cdot 7 = 1$$

$$\text{これと, } 17x + 22y = 1 \text{ より}$$

$$17(x+9) + 22(y-7) = 0$$

$$17(x+9) = 22(7-y)$$

右辺は22の倍数で、17と22は互いに素より

$$x+9 = 22k \quad (k \text{ は整数})$$

$$\therefore 17 \cdot 22k = 22(7-y)$$

$$\therefore 7-y = 17k$$

$$\text{以上より, } \underline{(x, y) = (22k-9, -17k+7)} \quad (k \text{ は任意の整数})$$

(2) 解と係数の関係より、 $\alpha + \beta = -A, \alpha\beta = B$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} \text{ より } -\frac{A}{B} = 2 \quad \therefore A = -2B \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{(\alpha\beta)^3} = \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{(\alpha\beta)^3} \text{ より } \frac{-A^3 + 3BA}{B^3} = 3 \quad \textcircled{4} \text{ を代入して, } \frac{8B^3 - 6B^2}{B^3} = 3$$

$$\therefore B = \frac{6}{5} \quad \text{このとき } \textcircled{4} \text{ より } A = -\frac{12}{5} \quad \therefore \underline{A = -\frac{12}{5}, B = \frac{6}{5}}$$

(3) $y = x^{\sqrt{x}}$ ($x > 0$) の両辺対数をとって

$$\log y = \sqrt{x} \log x$$

両辺 x で微分して、

$$\frac{d}{dx} (\log y) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \log x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\therefore \frac{d}{dy} (\log y) \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\therefore \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{2 + \log x}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore \underline{y' = \frac{2 + \log x}{2\sqrt{x}} \cdot x^{\sqrt{x}} \quad (x > 0)}$$