高知大学

2016年 教育学部 第4問　1枚目／2枚　数理 石井K

4 座標平面上に放物線 $C : y = \dfrac{1}{6\sqrt{3}}x^2$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) C と2点 $\left(-3,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(3,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で接している円の方程式を求めよ．

(2) C と (1) の円で囲まれる部分の面積を求めよ．

(3) C と点 $\left(3,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で接し，y 軸にも接している円の方程式を求めよ．

(4) C と y 軸および (3) の円で囲まれる部分の面積を求めよ．

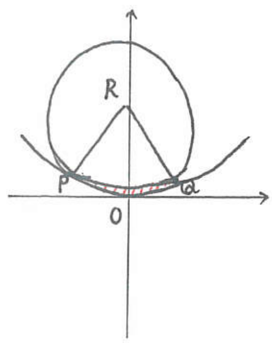
(1) $y' = \dfrac{x}{3\sqrt{3}}$ より，$\left(-3, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ における C の法線は，$y = \sqrt{3}(x+3) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$\therefore y = \sqrt{3}x + \dfrac{7\sqrt{3}}{2}$ …①

同様に $\left(3, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ における法線は，$y = -\sqrt{3}x + \dfrac{7\sqrt{3}}{2}$ …②

円の中心は①と②の交点より，$\left(0, \dfrac{7\sqrt{3}}{2}\right)$ であり，半径を $r\,(>0)$ とおくと，

$r^2 = (3-0)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{7\sqrt{3}}{2}\right)^2$　$\therefore r>0$ より，$r = 6$

$\therefore$ 円の方程式は，$\underline{x^2 + \left(y - \dfrac{7\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 36}$ //



(2) $P\left(-3, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $Q\left(3, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $O(0.0)$, $R\left(0, \dfrac{7\sqrt{3}}{2}\right)$ とおくと，

$\triangle PQR$ は1辺の長さが6の正三角形より，求める面積を S とすると，

$$S = 2\int_0^3 -\sqrt{3}x + \frac{7\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6\sqrt{3}}x^2\,dx - \pi\cdot 6^2\cdot\frac{1}{6}$$

$$= 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{7\sqrt{3}}{2}x - \frac{x^3}{18\sqrt{3}}\right]_0^3 - 6\pi$$

$$= 2\left(-\frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{21\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 6\pi$$

$$= \underline{11\sqrt{3} - 6\pi}\ //$$

(3) 中心は②上にあるから，中心を $\left(t, -\sqrt{3}t + \dfrac{7\sqrt{3}}{2}\right)$ とおくと，y 軸と接することから

半径は，t である．ただし，$t > 0$

このとき，$\sqrt{(t-3)^2 + \left(-\sqrt{3}t + \dfrac{7\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = t$

$\therefore t^2 - 8t + 12 = 0$

$(t-2)(t-6) = 0$

$t = 2, 6$

$\therefore\ \underline{(x-2)^2 + \left(y - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 4,\ (x-6)^2 + \left(y + \dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 36}$ //

2枚目へつづく

2016年 教育学部 第4問　　2枚目／2枚

$\boxed{4}$ 座標平面上に放物線 $C : y = \dfrac{1}{6\sqrt{3}}x^2$ を考える．次の問いに答えよ．

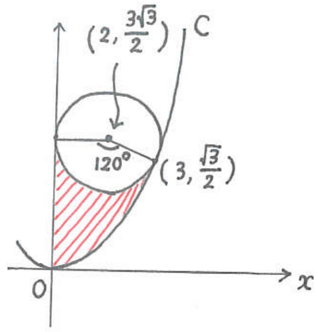
(1) C と2点 $\left(-3,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(3,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で接している円の方程式を求めよ．

(2) C と (1) の円で囲まれる部分の面積を求めよ．

(3) C と点 $\left(3,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で接し，y 軸にも接している円の方程式を求めよ．

(4) C と y 軸および (3) の円で囲まれる部分の面積を求めよ．

(4) (i) $(x-2)^2+\left(y-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=4$ のとき.



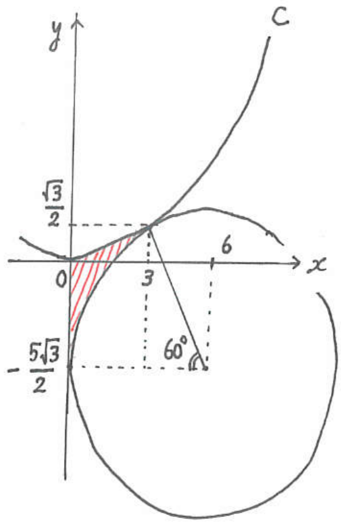
$$S=\int_0^2 \frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{6\sqrt{3}}x^2\,dx+\int_2^3 -\sqrt{3}x+\frac{7\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{6\sqrt{3}}x^2\,dx-\pi\cdot 2^2\cdot\frac{1}{3}$$

$$=\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}x-\frac{x^3}{18\sqrt{3}}\right]_0^2+\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{7\sqrt{3}}{2}x-\frac{x^3}{18\sqrt{3}}\right]_2^3-\frac{4}{3}\pi$$

$$=3\sqrt{3}-\frac{4}{9\sqrt{3}}-\frac{9\sqrt{3}}{2}+\frac{21\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-2\sqrt{3}+7\sqrt{3}-\frac{4}{9\sqrt{3}}\right)-\frac{4}{3}\pi$$

$$=\underline{\frac{7\sqrt{3}}{2}-\frac{4}{3}\pi}\ //$$

(ii) $(x-6)^2+\left(y+\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2=36$ のとき.



$$S=\int_0^3 \frac{1}{6\sqrt{3}}x^2-\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)dx+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6\cdot\sin 60^\circ-\pi\cdot 6^2\cdot\frac{1}{6}$$

$$=\left[\frac{x^3}{18\sqrt{3}}+\frac{5\sqrt{3}}{2}x\right]_0^3+\frac{9\sqrt{3}}{2}-6\pi$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{15\sqrt{3}}{2}+\frac{9\sqrt{3}}{2}-6\pi$$

$$=\underline{\frac{25\sqrt{3}}{2}-6\pi}\ //$$