

2010年 スポーツ科学学部 第2問

2 次の問いに答えよ。

(1) 自然数 n が $n = p^2q$ (p, q は素数, $p \neq q$) の形で表されるとき, n の正の約数は6個あり, それらの和は

$$(\square\text{ク} + p + p^2)(\square\text{ケ} + q)$$

と表すことができる. このような n で正の約数の和が $2n$ となるような数を求める. 正の約数の和が $2n$ であるから,

$$2p^2q = (\square\text{ク} + p + p^2)(\square\text{ケ} + q)$$

が成り立つ. $\square\text{ク} + p + p^2$ は奇数であり, p の倍数ではないから, $\square\text{ケ} + q$ は $2p^2$ の倍数となり,

$$\square\text{ケ} + q = 2p^2k \quad (k \text{ は自然数})$$

とおける. したがって,

$$q = (\square\text{ク} + p + p^2)k$$

となるが, q は素数であるから, $k = \square\text{コ}$ である. よって

$$p^2 - p - \square\text{サ} = 0$$

これを解いて, $p = \square\text{シ}$ である. ゆえに $n = \square\text{ス}$ である.

(2) 条件

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{a_n + 2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定められる数列 $\{a_n\}$ に対して, $b_n = \frac{a_n - 2}{a_n + 1}$ とおくと, 数列 $\{b_n\}$ は等比数列となり, これより, 数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \frac{\square\text{セ} \cdot \square\text{ソ}^n + \square\text{タ}}{\square\text{チ}^n - \square\text{ツ}}$$

となる.