一橋大学

2014年 第3問

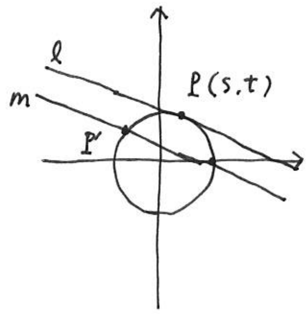
$\boxed{3}$ 円 $C : x^2+y^2=1$ 上の点Pにおける接線を ℓ とする．点 $(1,\ 0)$ を通り ℓ と平行な直線を m とする．直線 m と円 C の $(1,\ 0)$ 以外の共有点をP$'$とする．ただし，m が直線 $x=1$ のときはP$'$を $(1,\ 0)$ とする．

円 C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ から点 $\mathrm{P}'(s',\ t')$ を得る上記の操作をTと呼ぶ．

(1) $s',\ t'$ をそれぞれ s と t の多項式として表せ．

(2) 点Pに操作Tを n 回繰り返して得られる点を P_n とおく．Pが $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ のとき，P_1，P_2，P_3 を図示せよ．

(3) 正の整数 n について，$\mathrm{P}_n=\mathrm{P}$ となるような点Pの個数を求めよ．



(1) $\ell : sx+ty=1$

$\therefore\ m : sx+ty=u$ とおくと，m は $(1,0)$ を通ることから

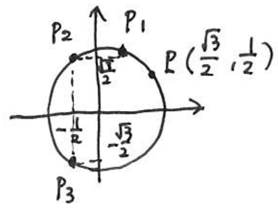
$u=s \quad \therefore\ m : sx+ty=s$

$\underbrace{\quad}_{t\neq 0\text{のとき}}\ x^2+\left(\dfrac{s-sx}{t}\right)^2=1 \quad \therefore\ x=1,\ 2s^2-1$

$x\neq 1$ より．$x=2s^2-1$，$y=2st$ 　これは $t=0$ のときも成立．

$\therefore\ \underline{s'=2s^2-1,\ t'=2st}$

(2) (1)より，$P_1\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$P_2\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$P_3\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



(3) $P(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくと．

$P_1(2\cos^2\theta-1,\ 2\sin\theta\cos\theta)=P_1(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$

$P_2(2\cos^2 2\theta-1,\ 2\sin 2\theta\cos 2\theta)=P_2(\cos 4\theta,\ \sin 4\theta)$

$\vdots$

$P_n(\cos 2^n\theta,\ \sin 2^n\theta)$ となるので，

$P_n=P \iff 2^n\theta=\theta+2k\pi$ 　$(0\leqq\theta<2\pi$ とする$)$ $(k$ は整数$)$

$\therefore\ \theta=\dfrac{2k\pi}{2^n-1}$ 　$(n\geqq 1)$

$0\leqq\dfrac{2k\pi}{2^n-1}<2\pi$ より $0\leqq 2k\pi<2(2^n-1)\pi$ 　$\therefore\ 0\leqq k<2^n-1$

$\therefore$ $(k$ の個数$)=(P$ の個数$)$ なので $\underline{2^n-1\text{ 個}}$