0002184815187999

# 一橋大学

2016年第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 硬貨が2枚ある．最初は2枚とも表の状態で置かれている．次の操作を $n$ 回行った後，硬貨が2枚とも裏になっている確率を求めよ．

（操作）2枚とも表，または2枚とも裏のときには2枚の硬貨両方を投げ，表と裏が1枚ずつのときには，表になっている硬貨だけを投げる．

操作を $n$ 回行った後，2枚とも裏になっている確率を $p_n$，2枚とも表になっている確率を $q_n$ とおく

$n+1$ 回行った後，2枚とも裏になるのは次の場合である．

- $n$ 回行った後，2枚とも表，または2枚とも裏で，$n+1$ 回目に2枚を投げ，2枚とも裏になる
- $n$ 回行った後，表と裏が1枚ずつで，表になっている方を投げ，それが裏になる．

よって，$p_{n+1}=(p_n+q_n)\cdot\frac{1}{4}+(1-p_n-q_n)\cdot\frac{1}{2}$

$\therefore\ p_{n+1}=-\frac{1}{4}p_n-\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{2}$ …①

同様に，$n+1$ 回行った後，2枚とも表になるのは次の場合である．

- $n$ 回行った後，2枚とも表，または2枚とも裏で，$n+1$ 回目に2枚を投げ，2枚とも表になる

よって，$q_{n+1}=(p_n+q_n)\cdot\frac{1}{4}$

$\therefore\ q_{n+1}=\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{4}q_n$ …②

①＋②より，$p_{n+1}+q_{n+1}=\frac{1}{2}\ (n=1,2,\cdots)$

ここで，$p_1=\frac{1}{4}$，$q_1=\frac{1}{4}$ より，$p_1+q_1=\frac{1}{2}$

以上から，$p_n+q_n=\frac{1}{2}\ (n=1,2,\cdots)$ …③

①，③より，$p_{n+1}=-\frac{1}{4}p_n-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-p_n\right)+\frac{1}{2}$

$\therefore\ p_{n+1}=\frac{3}{8}\ (n=1,2,\cdots)$

以上より求める確率は，

$n=1$ のとき $\frac{1}{4}$，$n\geqq2$ のとき $\frac{3}{8}$ //