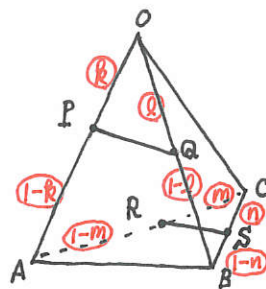


2013年 教育学部 第4問

4 四面体 $OABC$ の辺 OA , OB , CA , CB 上にそれぞれ点 P , Q , R , S をとる. このとき, 直線 PQ と直線 RS が平行であるための必要十分条件は

$$\frac{OP}{OA} = \frac{OQ}{OB} \quad \text{かつ} \quad \frac{CR}{CA} = \frac{CS}{CB} \quad \dots (*)$$

であることを証明せよ.



↑
このような比を自分で設定してやるのがポイント!

$$\vec{OP} = k\vec{OA} \quad (0 < k < 1), \quad \vec{OQ} = l\vec{OB} \quad (0 < l < 1)$$

$$\vec{OR} = m\vec{OA} + (1-m)\vec{OC} \quad (0 < m < 1)$$

$$\vec{OS} = n\vec{OB} + (1-n)\vec{OC} \quad (0 < n < 1) \quad \text{と表せる}$$

$$\text{このとき, } \vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = -k\vec{OA} + l\vec{OB}$$

$$\text{同様に, } \vec{RS} = -m\vec{OA} + n\vec{OB} + (m-n)\vec{OC}$$

● $PQ \parallel RS \Rightarrow (*)$ を示す.

$$\vec{PQ} = t\vec{RS} \quad (t: \text{実数}) \quad \text{と表せるので } \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC} \text{ が一次独立より}$$

$$\begin{cases} -k = -mt \\ l = nt \\ 0 = t(m-n) \end{cases} \quad \vec{PQ} \neq \vec{0} \text{ より } t \neq 0$$

よって, $m = n$ かつ $k = l$

$$\therefore OP = k \cdot OA, \quad OQ = k \cdot OB, \quad CR = m \cdot CA, \quad CS = m \cdot CB$$

$$\text{以上より, } \frac{OP}{OA} = \frac{OQ}{OB} (=k) \quad \text{かつ} \quad \frac{CR}{CA} = \frac{CS}{CB} (=m) \quad \text{よって } (*) \text{ が成り立つ}$$

● $(*) \Rightarrow PQ \parallel RS$ を示す.

$$\frac{OP}{OA} = \frac{OQ}{OB} = k \quad \text{かつ} \quad \frac{CR}{CA} = \frac{CS}{CB} = m \quad \text{が成り立つとすると.}$$

$$\vec{PQ} = -k\vec{OA} + k\vec{OB}, \quad \vec{RS} = -m\vec{OA} + m\vec{OB}$$

$$\therefore \vec{PQ} = \frac{m}{k} \vec{RS} \quad \text{となり. } PQ \parallel RS \text{ が成り立つ}$$

$$\text{以上より, } PQ \parallel RS \iff (*) \text{ となる} \quad \blacksquare$$

必要十分