# 島根大学

2014年 医学部 第2問



$\boxed{2}$ $f(x) = \dfrac{8x}{\sqrt{x^2+1}}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y = f(x)$ の凹凸と漸近線を調べて，そのグラフの概形をかけ．

(2) $k$ を正の定数とする．関数 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = x + k$ がちょうど 2 個の共有点をもつとき，$k$ の値を求めよ．

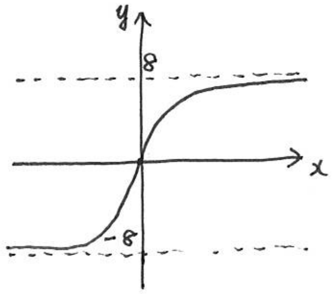
(3) $k$ を (2) で求めた定数とする．このとき，$x \geqq 0$ の範囲で，関数 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = x + k$ および $y$ 軸で囲まれた図形の面積 $S$ を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{8}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 8$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-8}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -8$

$$f'(x) = \frac{8\sqrt{x^2+1} - 8x\cdot\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{8(x^2+1)-8x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{8}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

$$f''(x) = -12\cdot 2x(x^2+1)^{-\frac{5}{2}} = -24x(x^2+1)^{-\frac{5}{2}}$$

| $x$ | $(-\infty)$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $(+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $+$ | $+$ | |
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-8$ | ↗ | $0$ | ↗ | $8$ |




(2) $x<0$ で必ず1個交点をもつから，$x \geqq 0$ で交点を1個もてばよい

$\therefore$ $x>0$ で接すればよい．$\therefore$ $f'(x) = 1$ となるのは，$x^2+1 = 4$ $\therefore$ $x = \sqrt{3}$

$\therefore$ 接点は $(\sqrt{3}, 4\sqrt{3})$ $y = x + k$ がこの点を通るから $\underline{k = 3\sqrt{3}}$

(3) $\displaystyle S = (\text{台形}) - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{8x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\cdot 7\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{8x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

$\displaystyle = \frac{21}{2} - 8\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^{\sqrt{3}}$

$\displaystyle = \frac{21}{2} - 8$

$\displaystyle = \underline{\frac{5}{2}}$