0001821278718999

福岡教育大学

2014年第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ $a_n = -2n + 212$ で定められる数列 $\{a_n\}$ を次のような群に分け，第 k 群には k 個の項が入るようにする．

$$\underbrace{a_1}_{第1群} \mid \underbrace{a_2,\ a_3}_{第2群} \mid \underbrace{a_4,\ a_5,\ a_6}_{第3群} \mid \underbrace{a_7,\ a_8,\ a_9,\ a_{10}}_{第4群} \mid \cdots$$

第 k 群に含まれるすべての項の和を S_k とするとき，次の問いに答えよ．

(1) S_k を求めよ．

(2) S_k が最大となる群に含まれる項の平均値を求めよ．

(3) $|S_k| = |S_{k+1}|$ を満たす k を求めよ．

(1) 第1群～第 $k-1$ 群に入っている項の数の和は，$\sum_{i=1}^{k-1} i = \frac{1}{2}(k-1)\cdot k$

∴第 k 群の最初の項は，$a_{\frac{1}{2}k(k-1)+1} = -2\left\{\frac{1}{2}k(k-1)+1\right\} + 212$

$= -k^2 + k + 210$

第 k 群の最後の項は，$-k^2 + k + 210 + (k-1)\cdot(-2) = -k^2 - k + 212$

∴ $S_k = \frac{k}{2}\left\{-k^2 + k + 210 + (-k^2 - k + 212)\right\} = \underline{-k^3 + 211k}$ //

(2) $S_{k+1} - S_k = -3(k^2 + k - 70)$

∴はじめて $S_{k+1} - S_k < 0$ となるのは，$k > \frac{-1+\sqrt{281}}{2}$ k:整数より $k = 8$

このとき，$S_8 = 1176$，$S_9 = 1170$ となる

∴ $k = 8$ のとき，平均値は $\frac{S_8}{8} = \frac{1176}{8} = \underline{147}$ //

(3) (2)より，$S_{k+1} = S_k \iff k^2 + k - 70 = 0$ より，そのような k はない

∴ $S_k = -S_{k+1}$ をみたすときを考えると，$S_k = 0$ となるのは，$k = \sqrt{211}$

$14 = \sqrt{196} < \sqrt{211} < \sqrt{225} = 15$

このとき，$S_{14} = -14^3 + 211\cdot 14 = 210$，$S_{15} = -15^3 + 211\cdot 15 = -210$

∴ $\underline{k = 14}$ //