

2013年第6問



6 x は関係式 $\frac{1}{x} = \frac{x}{y} = 1 + \frac{y}{x}$ を満たす正の実数とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) x, y を求めよ。
 (2) $t = 2x + y$ とするとき、 t^5 の値を求めよ。

$$(1) \frac{1}{x} = \frac{x}{y} \quad \text{より} \quad y = x^2$$

$$\frac{1}{x} = 1 + \frac{y}{x} \quad \text{より} \quad \frac{1}{x} = 1 + \frac{x^2}{x} \quad \therefore \text{両辺に } x \text{ をかけて}$$

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$x > 0 \quad \text{より} \quad x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad \text{このとき} \quad y = x^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} //$$

$$(2) \quad t = 2x + y \\ = x + (x + y) \\ = x + 1$$

$$\therefore t^5 = (x + 1)^5 \\ = (x^2 + 2x + 1)^2 \cdot (x + 1)$$

ここで、 x は $x^2 + x - 1 = 0$ の解なので $x^2 + 2x + 1 = x + 2$

$$\begin{aligned} \therefore t^5 &= (x + 2)^2 \cdot (x + 1) \\ &= (x^2 + 4x + 4)(x + 1) \\ &= (3x + 5)(x + 1) \end{aligned} \quad \begin{aligned} &= 3x^2 + 8x + 5 \\ &= 3(1 - x) + 8x + 5 \\ &= 5x + 8 \\ &= \frac{5\sqrt{5} + 11}{2} // \end{aligned}$$