広島市立大学

2015年 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) 等式 $\sin\frac{2}{5}\pi=\sin\frac{3}{5}\pi$ が成り立つことを示せ．

(2) $a=\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}$，$b=\dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta}$ とおく．$\cos\theta=t$ とするとき，a と b をそれぞれ t の整式として表せ．ただし，$0<\theta<\pi$ とする．

(3) $\cos\frac{\pi}{5}$ の値を求めよ．

(1)
$$\begin{aligned}\sin\frac{2}{5}\pi &= \sin\left(\pi-\frac{3}{5}\pi\right)\\ &= \sin\pi\cos\frac{3}{5}\pi-\cos\pi\sin\frac{3}{5}\pi\\ &= \sin\frac{3}{5}\pi \quad ▨\end{aligned}$$

(2) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ より． $a=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}$ $\quad\therefore\ \underline{a=2t}$ //

$\sin 3\theta = 3\sin\theta-4\sin^3\theta$ より． $b=\dfrac{3\sin\theta-4\sin^3\theta}{\sin\theta}$ $\quad\therefore\ \underline{b=4t^2-1}$ //

(3) (2)より．$\theta=\frac{\pi}{5}$ とすると，

$$\sin\frac{2\pi}{5}=a\sin\frac{\pi}{5},\quad \sin\frac{3\pi}{5}=b\sin\frac{\pi}{5}$$

これを(1)の式に代入して．

$$a\sin\frac{\pi}{5}=b\sin\frac{\pi}{5}$$

$$\therefore\ \sin\frac{\pi}{5}\cdot(2t-4t^2+1)=0$$

$$\therefore\ 4t^2-2t-1=0 \quad \left(\because\ \sin\frac{\pi}{5}>0\right)$$

$$\begin{aligned}\therefore\ t &= \frac{2\pm\sqrt{4+4\cdot4}}{8}\\ &= \frac{1\pm\sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

$t=\cos\frac{\pi}{5}$ であり．$t>0$ なので $\underline{\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$ //