2015年 工・理・教育 第2問

数理 石井K

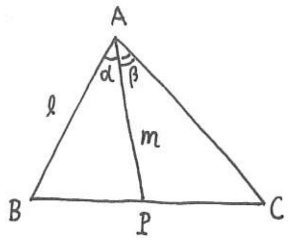
$\boxed{2}$ $\triangle$ABC において，辺 BC 上に頂点 B，C とは異なる点 P をとる．AB $= l$，AP $= m$，$\angle$PAB $= \alpha$，$\angle$PAC $= \beta$ とするとき，次の問いに答えなさい．

(1) $\triangle$ABP の面積を l，m，α を用いて表しなさい．

(2) AC の長さおよび $\triangle$ABC の面積 S を l，m，α，β を用いて表しなさい．

(3) 次の不等式が成り立つことを示しなさい．

$$S \geqq \frac{2m^2 \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$



(1) $\triangle ABP = \frac{1}{2} \cdot l \cdot m \cdot \sin\alpha$ //

(2) $\triangle APC = \frac{1}{2} \cdot m \cdot AC \cdot \sin\beta$

$S = \triangle ABP + \triangle APC$

$= \frac{1}{2} m (l \sin\alpha + AC \sin\beta)$ …①

一方，$S = \frac{1}{2} l \cdot AC \cdot \sin(\alpha+\beta)$ …②

①，②より．$lm\sin\alpha + m \cdot AC \sin\beta = l \cdot AC \sin(\alpha+\beta)$

$\therefore AC \cdot \{ l \sin(\alpha+\beta) - m\sin\beta \} = lm\sin\alpha$

$\therefore AC = \dfrac{lm\sin\alpha}{l\sin(\alpha+\beta) - m\sin\beta}$ //　そのとき②より．$S = \dfrac{l^2 m \sin\alpha \sin(\alpha+\beta)}{2\{ l\sin(\alpha+\beta) - m\sin\beta \}}$ //

(3) (2)より．

$$S - \frac{2m^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{l^2 m \sin\alpha \sin^2(\alpha+\beta) - 2m^2 \sin\alpha\sin\beta \cdot 2\{l\sin(\alpha+\beta) - m\sin\beta\}}{2\sin(\alpha+\beta)\{l\sin(\alpha+\beta) - m\sin\beta\}}$$

$$= \frac{m\sin\alpha\{l^2\sin^2(\alpha+\beta) - 4m\sin\beta \cdot l\sin(\alpha+\beta) + 4m^2\sin^2\beta\}}{2\sin(\alpha+\beta)\{l\sin(\alpha+\beta) - m\sin\beta\}}$$

$$= \frac{m\sin\alpha\{l\sin(\alpha+\beta) - 2m\sin\beta\}^2}{2\sin(\alpha+\beta)\{l\sin(\alpha+\beta) - m\sin\beta\}}$$

$\geqq 0$　($\because m>0$，$\sin\alpha > 0$，$\sin(\alpha+\beta) > 0$，$l\sin(\alpha+\beta) - m\sin\beta > 0$ より)

(2) の S の式において．$S>0$，(分子)>0 であるから (分母)>0 となる．

よって．$S \geqq \dfrac{2m^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ が成り立つ ▨