京都大学

2014年 文系 第3問

3 座標空間における次の3つの直線 ℓ, m, n を考える：

ℓ は点 A(1, 0, −2) を通り，ベクトル $\vec{u} = (2,\ 1,\ -1)$ に平行な直線である．
m は点 B(1, 2, −3) を通り，ベクトル $\vec{v} = (1,\ -1,\ 1)$ に平行な直線である．
n は点 C(1, −1, 0) を通り，ベクトル $\vec{w} = (1,\ 2,\ 1)$ に平行な直線である．

P を ℓ 上の点として，P から m, n へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする．このとき，$\mathrm{PQ}^2 + \mathrm{PR}^2$ を最小にするような P と，そのときの $\mathrm{PQ}^2 + \mathrm{PR}^2$ を求めよ．

Oを原点とすると，

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + x\vec{u}$ と表されるので，$P(1+2x,\ x,\ -2-x)$ となる．

同様に，$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + y\vec{v}$，$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OC} + z\vec{w}$ と表されるので

$Q(1+y,\ 2-y,\ -3+y)$，$R(1+z,\ -1+2z,\ z)$ となる．

$\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}$ より $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v} = 0$，$\overrightarrow{PR} \perp \vec{w}$ より $\overrightarrow{PR}\cdot\vec{w} = 0$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (y-2x,\ 2-y-x,\ -1+y+x)$

$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = (z-2x,\ -1+2z-x,\ z+2+x)$ より

$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v} = y-2x-2+y+x-1+y+x = 0 \quad \therefore\ y = 1$

$\overrightarrow{PR}\cdot\vec{w} = z-2x-2+4z-2x+z+2+x = 0 \quad \therefore\ z = \frac{1}{2}x$

$\therefore\ \overrightarrow{PQ} = (1-2x,\ 1-x,\ x)$，$\overrightarrow{PR} = \left(-\frac{3}{2}x,\ -1,\ \frac{3}{2}x+2\right)$

$$\therefore\ |\overrightarrow{PQ}|^2 + |\overrightarrow{PR}|^2 = (1-2x)^2 + (1-x)^2 + x^2 + \frac{9}{4}x^2 + 1 + \left(\frac{3}{2}x+2\right)^2$$
$$= \frac{21}{2}x^2 + 7$$

$\therefore$ $P(1,\ 0,\ -2)$ のとき $PQ^2 + PR^2$ は最小値 7 をとる //