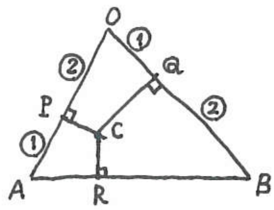
茨城大学

2014年第3問

3 $\mathrm{OA}=\sqrt{3}$, $\mathrm{OB}=2$, $\mathrm{AB}=\sqrt{5}$ となる三角形OABがある．三角形OABの内部の点Cから辺OA，OBに下ろした垂線の足をそれぞれP，Qとすると，

$$\mathrm{OP}:\mathrm{PA}=2:1,\quad \mathrm{OQ}:\mathrm{QB}=1:2$$

であった．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくとき，以下の各問に答えよ．



(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{c}\cdot\vec{a}$, $\vec{c}\cdot\vec{b}$ をそれぞれ求めよ．

(2) $\vec{c}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) 点Cから辺ABに下ろした垂線の足をRとするとき，AR : RB を求めよ．

注 点Xから辺YZに下ろした垂線の足とは，点Xから辺YZに下ろした垂線と辺YZとの交点のことである．

(1) $|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$\therefore 5=3-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4$ $\quad\therefore \underline{\vec{a}\cdot\vec{b}=1}$ //

$\overrightarrow{CP}\cdot\vec{a}=0$ より，$\left(\frac{2}{3}\vec{a}-\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=0$ $\quad\therefore \frac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ $\quad\therefore \underline{\vec{c}\cdot\vec{a}=2}$ //

$\overrightarrow{CQ}\cdot\vec{b}=0$ より，$\left(\frac{1}{3}\vec{b}-\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=0$ $\quad\therefore \frac{1}{3}|\vec{b}|^2-\vec{c}\cdot\vec{b}=0$ $\quad\therefore \underline{\vec{c}\cdot\vec{b}=\frac{4}{3}}$ //

(2) $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ とおくと，

$\vec{c}\cdot\vec{a}=2$ より，$x|\vec{a}|^2+y\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ $\quad\therefore 3x+y=2\cdots$①

$\vec{c}\cdot\vec{b}=\frac{4}{3}$ より，$x\vec{a}\cdot\vec{b}+y|\vec{b}|^2=\frac{4}{3}$ $\quad\therefore x+4y=\frac{4}{3}\cdots$②

①，② より $y=\frac{2}{11}$, $x=\frac{20}{33}$ $\quad\therefore \underline{\vec{c}=\frac{20}{33}\vec{a}+\frac{2}{11}\vec{b}}$ //

(3) AR : RB $=s:1-s$ とおくと，

$\overrightarrow{OR}=(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{CR}=\left(\frac{13}{33}-s\right)\vec{a}+\left(s-\frac{2}{11}\right)\vec{b}$

$\overrightarrow{CR}\perp\overrightarrow{AB}$ より，$\left\{\left(\frac{13}{33}-s\right)\vec{a}+\left(s-\frac{2}{11}\right)\vec{b}\right\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\frac{13}{33}-s-3\left(\frac{13}{33}-s\right)+4\left(s-\frac{2}{11}\right)-s+\frac{2}{11}$

$=5s-\frac{4}{3}$

$\therefore 5s-\frac{4}{3}=0$ より $s=\frac{4}{15}$

$\therefore \underline{\mathrm{AR}:\mathrm{RB}=4:11}$ //