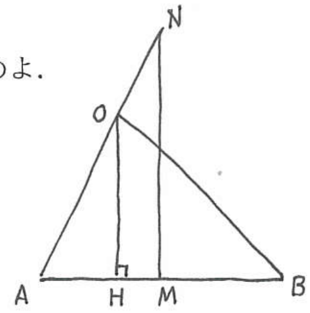
2013年 工学部 第4問　1枚目/2枚



$\boxed{4}$ 三角形OABがある．点Oから直線ABに下ろした垂線の足をHとする．辺ABの中点をMとし，Mを通り辺ABに垂直な直線と直線OAとの交点をNとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とし，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=p$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および $p$ を用いて表せ．
(2) $\overrightarrow{ON}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および $p$ を用いて表せ．
(3) $p \geqq 0$ であるとき $\dfrac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OA}}$ の値の範囲を求めよ．
(4) 点Nが線分OAを1:3に内分するとき，三角形OABの面積 $S$ を求めよ．




(1) Hは直線AB上の点なので $\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+(1-s)\vec{b}$ と表せる．

$OH \perp AB$ より．$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ であるから

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=(s\vec{a}+(1-s)\vec{b})(\vec{b}-\vec{a})$$
$$=s\vec{a}\cdot\vec{b}-s|\vec{a}|^2+(1-s)|\vec{b}|^2-(1-s)\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$=(2s-1)p-9s+4(1-s)$$
$$=(2p-13)s-p+4$$

$\therefore\ s=\dfrac{p-4}{2p-13}$　　このとき．$\underline{\overrightarrow{OH}=\dfrac{p-4}{2p-13}\vec{a}+\dfrac{p-9}{2p-13}\vec{b}}$ //

(2) $\overrightarrow{ON}=t\vec{a}$ と表せるので．$\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-t\vec{a}=(\frac{1}{2}-t)\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

$OH \parallel NM$ より．$\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{NM}$ と表せる．

$$\therefore\ \frac{p-4}{2p-13}\vec{a}+\frac{p-9}{2p-13}\vec{b}=\left(\frac{1}{2}-t\right)k\vec{a}+\frac{1}{2}k\vec{b}$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立より．係数を比較して．

$$\begin{cases}\dfrac{p-4}{2p-13}=\left(\dfrac{1}{2}-t\right)k & \cdots① \\[2ex] \dfrac{p-9}{2p-13}=\dfrac{1}{2}k & \cdots②\end{cases}$$

①，②より．$\dfrac{p-4}{p-9}=1-2t$　$\therefore\ t=\dfrac{5}{18-2p}$　　$\therefore\ \underline{\overrightarrow{ON}=\dfrac{5}{18-2p}\vec{a}}$ //

2013年 工学部 第4問　2枚目／2枚

数理石井

$\boxed{4}$ 三角形OABがある．点Oから直線ABに下ろした垂線の足をHとする．辺ABの中点をMとし，Mを通り辺ABに垂直な直線と直線OAとの交点をNとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とし，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=p$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および $p$ を用いて表せ．
(2) $\overrightarrow{ON}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および $p$ を用いて表せ．
(3) $p \geqq 0$ であるとき $\dfrac{ON}{OA}$ の値の範囲を求めよ．
(4) 点Nが線分OAを1：3に内分するとき，三角形OABの面積 $S$ を求めよ．

(3) $p=\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$ より

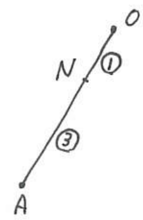
$-6<p<6$

$\therefore$ $p\geqq 0$ であるとき．$0\leqq p<6$

(2)より．$\dfrac{ON}{OA}=\left|\dfrac{5}{18-2p}\right|=\dfrac{5}{18-2p}$

$\therefore\ \dfrac{5}{18}\leqq\dfrac{ON}{OA}<\dfrac{5}{6}$ //

(4) 右の図より．$\dfrac{ON}{OA}=\dfrac{5}{18-2p}=\dfrac{1}{4}$　　$\therefore\ p=-1$




$\therefore\ S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{3^2\cdot 2^2-(-1)^2}$

$=\dfrac{\sqrt{35}}{2}$ //