

2018年工学部第4問

4 座標空間内の3点

$O(0, 0, 0)$, $A(3, 0, 4)$, $B(1, -2, 2)$

を通る平面を α とする. α 上にない2点 C, D は次を満たす.

- (i) 点 C, D は平面 α に関して同じ側にある.
- (ii) 点 C から α に垂線 CE を下ろすと, 半直線 OE は角 AOB の二等分線であり, 辺 AB と点 G で交わる. 点 G は OE を $3:1$ に内分する.
- (iii) 点 D から α に垂線 DF を下ろすと, 半直線 AF は辺 OB と点 H で交わる. 点 H は辺 OB を $1:2$ に内分する.
- (iv) $CE = 2DF$

定数 k を $\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AH}$ となるようにとる. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおくと, 次の問いに答えよ.

- (1) \overrightarrow{OG} を \vec{a}, \vec{b} を用いて表し, 点 G の座標を求めよ.
- (2) 平面 α に垂直なベクトルで, 長さが $\sqrt{26}$ となるものを1つ求めよ.
- (3) 点 C から平面 α 上の点を通り点 D へ行く最短経路がある. このときに通る平面 α 上の点を P とする. \overrightarrow{OP} を \vec{a}, \vec{b} および k を用いて表せ.
- (4) (3)において, 点 P が $\triangle OAB$ の内部にあるための k の値の範囲を求めよ.