

2014年第1問

1  $\alpha, \beta$ は正の実数とする. 次の条件によって定義される数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  について, 以下の問に答えよ.

$$a_1 = \alpha, \quad b_1 = \beta,$$

$$a_{n+1} = \alpha a_n - \beta b_n, \quad b_{n+1} = \beta a_n + \alpha b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1)  $\alpha^2 + \beta^2 \leq 1$  が成り立つならば, 任意の自然数  $n$  に対して  $a_n^2 + b_n^2 \leq 1$  が成り立つことを示せ.
- (2)  $\alpha = \cos \theta, \beta = \sin \theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) と表されているとき,  $a_2, b_2, a_3, b_3$  を  $\theta$  を用いて表せ.
- (3)  $a_{12} = 1, b_{12} = 0$  となるような正の実数の組  $(\alpha, \beta)$  を全て求めよ.