



2016年医(保健)・工学部第2問

2 0でない複素数 α, β が $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 0$ を満たすとする。複素数平面上の4点を $O(0), A(\alpha), B(\beta), C(-\beta)$ として、次の問いに答えよ。

- (1) $\frac{\beta}{\alpha}$ を求めよ。
- (2) $\frac{\beta}{\alpha}$ の絶対値 r および偏角 θ を求めよ。ただし、偏角の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。
- (3) $\triangle ABO$ の3つの角の大きさを求めよ。
- (4) $\triangle ABO$ の面積を S_1 とし、 $\triangle ABC$ の面積を S_2 とするとき、 $\frac{S_2}{S_1}$ の値を求めよ。

(1) $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 0$ の両辺を $\alpha^2 (\neq 0)$ で割り、

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \frac{\beta}{\alpha} + 1 = 0$$

↓ 解の公式

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \text{ ,,}$$

$$(2) \frac{\beta}{\alpha} = \cos\left(\pm \frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\pm \frac{2}{3}\pi\right)$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ より, } \underline{r = 1, \theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi \text{ ,,}}$$

$$(3) (2) \text{ より, } \beta = \left\{ \cos\left(\pm \frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\pm \frac{2}{3}\pi\right) \right\} \alpha \text{ より}$$

右図のいずれかになる。どちらも

$$OA = OB, \angle AOB = \frac{2}{3}\pi \text{ の二等辺三角形であり,}$$

$$\text{よりの角は, } \underline{\angle AOB = \frac{2}{3}\pi, \angle OAB = \angle OBA = \frac{\pi}{6} \text{ ,,}}$$

$$(4) S_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

右の図より。

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \frac{S_2}{S_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = \underline{2 \text{ ,,}}$$

