北海道医療大学

2014年 薬学部・歯学部 第3問

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)$ を以下のように定める．

$$f(x)=\begin{cases}-3x & (x \leqq 0)\\ x^2+3x & (0<x)\end{cases}$$

このときの定積分 $S(t)=\displaystyle\int_{t-1}^{t} f(x)\,dx$ に関して，以下の問に答えよ．

(1) $S(0)$ の値を求めよ．

(2) 変数 t が以下の範囲にあるときの $S(t)$ を，それぞれ求めよ．

① $t<0$　　② $0 \leqq t<1$　　③ $1 \leqq t$

(3) $S(t)$ を最小にする t の値と，$S(t)$ の最小値を求めよ．

(1) $S(0)=\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$

$=\int_{-1}^{0} -3x\,dx$

$=\left[-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}$

$=\underline{\frac{3}{2}}$ //

(2) ① $S(t)=\int_{t-1}^{t} -3x\,dx$

$=\left[-\frac{3}{2}x^2\right]_{t-1}^{t}$

$=-\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{2}(t-1)^2$

$=\underline{-3t+\frac{3}{2}}$ //

② $S(t)=\int_{t-1}^{0} -3x\,dx+\int_{0}^{t} x^2+3x\,dx$

$=\left[-\frac{3}{2}x^2\right]_{t-1}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{t}$

$=\frac{3}{2}(t-1)^2+\frac{t^3}{3}+\frac{3}{2}t^2$

$=\underline{\frac{t^3}{3}+3t^2-3t+\frac{3}{2}}$ //

③ $S(t)=\int_{t-1}^{t} x^2+3x\,dx$

$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_{t-1}^{t}$

$=\frac{t^3}{3}+\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{3}(t-1)^3-\frac{3}{2}(t-1)^2 \rightarrow =\underline{t^2+2t-\frac{7}{6}}$ //

(3) $S(0)=\frac{3}{2}$，$S(1)=\frac{11}{6}$ であり．

$y=S(t)$ のグラフは．$t=0, 1$ で連続である．

① のとき．$S'(t)=-3<0$

② のとき．$S'(t)=t^2+6t-3$

$\therefore$ $0<t<1$ で $S'(t)=0$ となるのは $t=2\sqrt{3}-3$

③ のとき．$S'(t)=2t+2>0$ ($\because 1 \leqq t$)

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$2\sqrt{3}-3$	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(t)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$S(t)$	↘		↘		↗		↗

$\therefore$ 最小値をとる t は $\underline{t=2\sqrt{3}-3}$ //

この値を α とすると．$\alpha^2+6\alpha-3=0$ なので

$S(\alpha)=\frac{\alpha^3}{3}+3\alpha^2-3\alpha+\frac{3}{2}$

$=\frac{1}{3}\cdot(-6\alpha^2+3\alpha)+3\alpha^2-3\alpha+\frac{3}{2}$

$=\alpha^2-2\alpha+\frac{3}{2}$

$=-6\alpha+3-2\alpha+\frac{3}{2}$

$=\underline{\frac{57}{2}-16\sqrt{3}}$ //