

2016年薬学部・歯学部第2問

2 関数 $f(\theta) = \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{2}}$ について、以下の問に答えよ。ただし、 $0 \leq \theta \leq \pi$ とする。

- (1) $\cos \theta = \frac{1}{2}$ のとき、 $f(\theta)$ の値を求めよ。
 (2) $f(\theta)$ の最大値と、そのときの θ の値をそれぞれ求めよ。
 (3) 方程式 $f(\theta) = 0$ を解け。
 (4) $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ の値を求めよ。

(1) $0 \leq \theta \leq \pi$ より $\cos \theta = \frac{1}{2}$ のとき $\theta = \frac{\pi}{3}$

$$\therefore f(\theta) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} //$$

(2) $f(\theta) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{\pi}{3} \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{4}{3}\pi$ より 最大となるのは $\theta = \frac{\pi}{6}$ 、そのとき最大値 $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$ //

(3) (2) より、 $f(\theta) = 0 \iff \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \frac{\pi}{3} \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{4}{3}\pi$ より $\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}\pi \quad \therefore \theta = \frac{5}{12}\pi //$

(4) $f(\theta) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}$ に代入して

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{5}{12}\pi\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ここで加法定理より、 $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} //$$