2016 年 薬学部・歯学部 第 3 問

$\boxed{3}$ 放物線 $y = x^2 - 3x + 4$ と，その放物線上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2 - 3t + 4)$ における接線，y 軸および直線 $x = 5$ で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする．以下の問に答えよ．ただし，$0 < t < 5$ とする．

(1) 放物線 $y = x^2 - 3x + 4$ の頂点の座標を求めよ．

(2) 点 P における接線の方程式を求めよ．

(3) $S(1)$ の値を求めよ．

(4) $S(t)$ を求めよ．

(5) $S(t)$ の最小値を求めよ．また，そのときの t の値を求めよ．

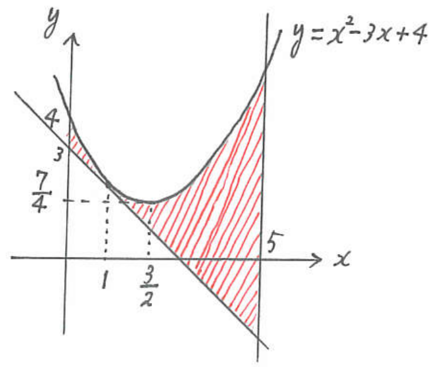
(1) $y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 4$

$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$ 　∴ 頂点は $\underline{\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)}$ //

(2) $y' = 2x - 3$

∴ 接線は．$y = (2t-3)(x-t) + t^2 - 3t + 4$

∴ $\underline{y = (2t-3)x - t^2 + 4}$ //



(3) $t = 1$ のとき．$\mathrm{P}(1, 2)$ で 接線は $y = -x + 3$

右図より．

$S(1) = \int_0^5 x^2 - 3x + 4 - (-x + 3)\, dx$

$= \left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^5$

$= \underline{\frac{65}{3}}$ //

(4) (3) と同様にして

$S(t) = \int_0^5 x^2 - 3x + 4 - \{(2t-3)x - t^2 + 4\}\, dx$

$= \int_0^5 (x-t)^2\, dx$

$= \left[\frac{1}{3}(x-t)^3\right]_0^5$

$= \underline{5t^2 - 25t + \frac{125}{3}}$ //

(5) (4) より

$S(t) = 5(t^2 - 5t) + \frac{125}{3}$

$= 5\left(t - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{125}{4} + \frac{125}{3}$

$= 5\left(t - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{125}{12}$

∴ 最小値 $\underline{\frac{125}{12}\ \left(t = \frac{5}{2} \text{ のとき}\right)}$ //

$0 < t < 5$ を
みたしている．