岐阜薬科大学

2014年 薬学部 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ 異なる n 個の整数 1, 2, 3, …, n の中から3個の整数を選び，それらの和を3で割った余りが 0, 1, 2 となる確率をそれぞれ p_n, q_n, r_n とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 同じ整数を重複して選ぶことを許すとき，p_9, q_9, r_9 を求めよ．

(2) 同じ整数を重複して選ぶことを許さないとき，

(i) p_{3k}, q_{3k}, r_{3k} を k を用いて表せ．ただし，$k \geqq 3$ とする．

(ii) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} p_{3k}$ を求めよ．

(1) $p_9 = q_9 = r_9 = \dfrac{1}{3}$ //

(2) 集合 $A=\{1, 4, 7, \cdots, 3k-2\}$, $B=\{2, 5, 8, \cdots, 3k-1\}$

$C=\{3, 6, 9, \cdots, 3k\}$ とおくと．

和を3で割った余りが0になる $\iff$ $\begin{cases} A, B, C \text{ からそれぞれ1個ずつ選ぶ} \\ \text{または} \\ \text{同じ集合から3個選ぶ} \end{cases}$

(i) $p_{3k} = \dfrac{({}_kC_1)^3}{{}_{3k}C_3} + \dfrac{{}_kC_3 \times 3}{{}_{3k}C_3} = \dfrac{3k^2-3k+2}{9k^2-9k+2}$ //

和を3で割った余りが1になる $\iff$ $\begin{cases} A\text{から2個，}B\text{から1個} \\ B \quad〃 \quad C \quad〃 \\ C \quad〃 \quad A \quad〃 \end{cases}$

$\therefore q_{3k} = \dfrac{{}_kC_2 \times {}_kC_1 \times 3}{{}_{3k}C_3} = \dfrac{3k^2-3k}{9k^2-9k+2}$ //

$r_{3k} = 1 - p_{3k} - q_{3k} = \dfrac{9k^2-9k+2-(3k^2-3k+2)-(3k^2-3k)}{9k^2-9k+2} = \dfrac{3k^2-3k}{9k^2-9k+2}$ //

(ii) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} p_{3k} = \lim_{k\to\infty} \dfrac{3-\frac{3}{k}+\frac{2}{k^2}}{9-\frac{9}{k}+\frac{2}{k^2}} = \dfrac{1}{3}$ //