0000049763205999

お茶の水女子大学

2011年 化学・情報科学科（共通問題）第1問

数理 石井K

1 xy 平面上の2つの放物線 C_1，C_2 を考える．

$$C_1 : y = -x^2 + 4x, \quad C_2 : y = x^2 - 2x$$

(1) C_1，C_2 の原点とは異なる交点Aの座標と C_2 の頂点Bの座標を求めよ．

(2) 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ から2点A，Bを通る直線 ℓ におろした垂線の足をHとする．Hの座標を x_1，y_1 を用いて表せ．ただし点Pは直線 ℓ 上にないものとする．

(3) 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ が C_1 上にあるとき，三角形ABPの面積を x_1 の式で表せ．

(4) 点Pが C_1 上を原点からAまで動くとき，三角形ABPの面積の最大値とそのときのPの座標を求めよ．

(1) $x^2-2x-(-x^2+4x)=0$ を解くと．

$2x(x-3)=0$ より．$x=0,3$

∴ 原点とは異なる交点Aの座標は $\underline{A(3,3)}$ //

また．$C_2 : y=(x-1)^2-1$ より．$\underline{B(1,-1)}$ //

(2). (1)より ℓ の方程式は．$\ell : y = \dfrac{3-(-1)}{3-1}(x-1)-1$ ∴ $\ell : y=2x-3$

∴ $\mathrm{H}(a,\ 2a-3)$ とおくと $\mathrm{PH}\perp \ell$ なので，$\dfrac{y_1-(2a-3)}{x_1-a}\cdot 2=-1$

∴ $a=\dfrac{x_1+2y_1+6}{5}$ ∴ $\underline{\mathrm{H}\left(\dfrac{x_1+2y_1+6}{5},\ \dfrac{2x_1+4y_1-3}{5}\right)}$ //

(3) $\mathrm{AB}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，PがC₁上にあるので，$y_1=-x_1^2+4x_1$

∴ (2)より $\mathrm{H}\left(\dfrac{-2x_1^2+9x_1+6}{5},\ \dfrac{-4x_1^2+18x_1-3}{5}\right)$

$$\therefore \mathrm{PH}=\sqrt{\left(x_1-\frac{-2x_1^2+9x_1+6}{5}\right)^2+\left(-x_1^2+4x_1-\frac{-4x_1^2+18x_1-3}{5}\right)^2}$$

$$=\frac{|x_1^2-2x_1-3|}{5}\sqrt{5}$$

$$\therefore \triangle \mathrm{ABP}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}\times|x_1^2-2x_1-3| = \underline{|x_1^2-2x_1-3|}$$ //

(4) (3)と $0\leqq x_1\leqq 3$ より．$\triangle \mathrm{ABP}=|(x_1-3)(x_1+1)|=-x_1^2+2x_1+3$

∴ $\triangle \mathrm{ABP}=-(x_1-1)^2+4$ ∴ $\underline{最大値4，このとき\mathrm{P}(1,3)}$ //