2012年 教育（文系）第4問

$\boxed{4}$ xy 平面上の点 $(a,\ b)$ から曲線 $y=x^3-2x$ に接線をひく．点 $(a,\ b)$ からの接線が 3 本ひけるときの $a,\ b$ についての条件を求め，点 $(a,\ b)$ の存在する領域を図示せよ．

$y'=3x^2-2$ より．接点を $(t,\ t^3-2t)$ とおくと．

接線は． $y=(3t^2-2)(x-t)+t^3-2t$

$\therefore\ y=(3t^2-2)x-2t^3$

となり．これが (a,b) を通ることから．

$b=(3t^2-2)a-2t^3$

これを t に関する方程式とみると．

$2t^3-3at^2+2a+b=0$

左辺を $f(t)$ とおくと．$f(t)=0$ が異なる3つの実数解をもてばよい．

$\therefore\ f'(t)=6t^2-6at$

$=6t(t-a)$

$\therefore\ f'(t)=0$ の解は $t=0,\ a$

(i) $a>0$ のとき

t	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$	$2a+b$	$\searrow$	$-a^3+2a+b$	$\nearrow$

(ii) $a<0$ のとき．

t	$\cdots$	a	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$	$-a^3+2a+b$	$\searrow$	$2a+b$	$\nearrow$

(i) $a>0$ のとき．

$f(0)>0$ かつ $f(a)<0$ となればよい

$\therefore\ b>-2a$ かつ $b<a^3-2a$

(ii) $a<0$ のとき．

$f(a)>0$ かつ $f(0)<0$ より

$b>a^3-2a$ かつ $b<-2a$

(iii) $a=0$ のとき．$f'(t)=6t^2\geqq 0$ $f(t)$ は単調増加となり不適．

(i)〜(iii)より

$$\begin{cases} b>-2a \text{ かつ } b<a^3-2a \\ \qquad \text{または} \\ b<-2a \text{ かつ } b>a^3-2a \end{cases}$$

$\therefore$ 右のグラフの斜線部分

（境界線は含まない）