北海道科学大学

2018年 工・保健・薬学部 第2問

$\boxed{2}$ 放物線 $C : y = 3x^2$ に接する2直線 ℓ 及び m について，C と ℓ の接点 A の x 座標を a，C と m の接点 B の x 座標を b とおく．ただし $a < b$ とする．

直線 ℓ の方程式は

$$y = \boxed{ア}\,ax - \boxed{イ}\,a^{\boxed{ウ}}$$

であり，直線 m の方程式は

$$y = \boxed{ア}\,bx - \boxed{イ}\,b^{\boxed{ウ}}$$

である．また ℓ と m の交点 I の座標を a，b を用いて表すと，

$$\left(\frac{a+b}{\boxed{エ}},\ \boxed{オ}\,ab\right)$$

である．

また，2点 A，B を通る直線の方程式は

$$y = \boxed{カ}\,(a+b)x - \boxed{キ}\,ab$$

であり，線分 AB の長さは

$$\mathrm{AB} = \left(\boxed{ク} - \boxed{ケ}\right)\sqrt{\boxed{コ} + \boxed{サ}\,(a+b)^{\boxed{シ}}}$$

である．

以下，I を通って y 軸に平行な直線を ℓ' とし，AB と ℓ' の交点を M とする．三角形 AIM の面積 S_1 は，

$$S_1 = \frac{\boxed{ス}\left(\boxed{セ} - \boxed{ソ}\right)^{\boxed{タ}}}{\boxed{チ}}$$

である．

また，放物線 C，直線 ℓ，および ℓ' で囲まれた領域の面積 S_2 は

$$S_2 = \frac{\left(\boxed{セ} - \boxed{ソ}\right)^{\boxed{タ}}}{\boxed{ツ}}$$

である．

さらに，放物線 C，線分 AM，および ℓ' で囲まれた領域の面積 S_3 は

$$S_3 = \frac{\left(\boxed{セ} - \boxed{ソ}\right)^{\boxed{タ}}}{\boxed{テ}}$$

である．

AB ＝ 2 を満たしながら点 A，点 B が動くとき，

$$S_3 = \boxed{\text{ト}}\left\{\boxed{\text{ナ}} + \boxed{\text{ニ}}(a+b)^{\boxed{\text{ヌ}}}\right\}^{\frac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}}$$

であり，このとき S_3 の最大値は $\boxed{\text{ヒ}}$ である．またそのとき，$a = \boxed{\text{フヘ}}$，$b = \boxed{\text{ホ}}$ である．