学習院大学

2011年 文学部 第1問

$\boxed{1}$ 次の3つの条件をすべて満たす3角形の3辺の長さを求めよ.

（i） 最大角と最小角の差は90°である.

（ii） 3辺の長さを大きさの順に並べたものは等差数列である.

（iii） 3辺の長さの和は3である.

(i)より最小角をθとおくと最大角は$\theta+90°$で, 残りの角は$90°-2\theta$である.

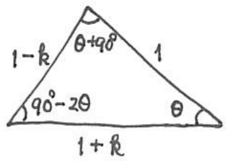
(ii)と(iii)より3辺の長さは $1-k$, 1, $1+k$ とおける.

このとき. すべての角は正なので, $0° < \theta < 45°$ $\cdots$ ①

また, 三角形の成立条件より. $1-k+1 > 1+k$ と辺の長さは正であることから. $0<k<1$

これらをともにみたすので, $0 < k < \frac{1}{2}$ $\cdots$ ②

最大辺と最大角, 最小辺と最小角はそれぞれ対応するので, 三角形は右のようになる. 三角形の面積Sは2通りの表し方ができて.



$$S = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+k)\sin\theta = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1-k)\sin(\theta+90°)$$

$$\therefore\ (1+k)\sin\theta = (1-k)\cos\theta$$

両辺2乗して. $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$ より. $(1+k)^2(1-\cos^2\theta) = (1-k)^2\cos^2\theta$

$$\therefore\ \cos^2\theta = \frac{(1+k)^2}{2(k^2+1)} \quad \cdots ③$$

また, 余弦定理より. $\cos\theta = \dfrac{1+(1+k)^2-(1-k)^2}{2\cdot 1\cdot(1+k)}$ $\quad\therefore\ \cos^2\theta = \dfrac{(1+4k)^2}{4(k+1)^2}$ $\cdots$ ④

③, ④ より. $4(k+1)^4 = 2(k^2+1)(1+4k)^2$

$$\therefore\ 14k^4+5k^2-1=0$$

$$\therefore\ (2k^2+1)(7k^2-1)=0 \qquad k>0 \text{ より. } k=\frac{1}{\sqrt{7}}$$

これは②をみたす. またこのとき③より $\cos^2\theta = \dfrac{8+2\sqrt{7}}{16}$ $\quad\therefore\ \cos\theta = \dfrac{\sqrt{7}+1}{4} > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

∴ ①をみたす.

∴ 3辺の長さは, $\underline{1-\frac{1}{\sqrt{7}},\ 1,\ 1+\frac{1}{\sqrt{7}}}$ //