



2013年第4問

4 正の整数 n について、 $x > 0$ で定義された関数 $f_n(x)$ を次で定める。

$$f_1(x) = x \log x$$

$$f_{n+1}(x) = (n+1) \int_1^x f_n(t) dt + \frac{1}{n+1}(x^{n+1} - 1)$$

以下の問に答えよ。ただし、 $\log x$ は x の自然対数とする。

- (1) 関数 $f_2(x)$ を求めよ。
- (2) 関数 $f_n(x)$ の具体的な形を推測し、それを数学的帰納法で証明せよ。
- (3) $g(x) = |f_2(x)| - |x - 1|$ とおくと、 $g(x)$ が $x = 1$ で微分可能であることを証明せよ。また、微分係数 $g'(1)$ を求めよ。