山梨大学

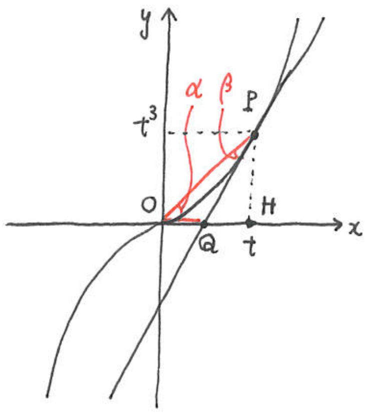
2014年 工学部・生命環境（生命工）第3問

$\boxed{3}$ 座標平面上の原点をO，曲線 $y = x^3$ 上の点 $P(t,\ t^3)$ $(t > 0)$ における接線と x 軸との交点をQとし，また $\alpha = \angle POQ$，$\beta = \angle OPQ$ とする．

(1) 点Qの座標を t を用いた式で表せ．

(2) $\tan\alpha$ および $\tan\beta$ を t を用いた式で表せ．

(3) $\tan\beta$ が最大となるような t とそのときの β の値を求めよ．



(1) $y' = 3x^2$ より．接線は．$y = 3t^2(x - t) + t^3$

$\therefore\ y = 3t^2x - 2t^3$

$\therefore\ 0 = 3t^2x - 2t^3$ より $x = \frac{2}{3}t$ $\quad\therefore\ \underline{Q\left(\frac{2}{3}t,\ 0\right)}$ //

(2) $\underline{\tan\alpha = \frac{t^3}{t} = t^2}$ //　　Pから x 軸に下ろした垂線の足をHとおくと．

$\tan\beta = \tan(\angle OPH - \angle QPH)$　　$\tan\angle OPH = \frac{t}{t^3}$，$\tan\angle QPH = \frac{\frac{1}{3}t}{t^3}$ より．

$$= \frac{\frac{t}{t^3} - \frac{t}{3t^3}}{1 + \frac{t}{t^3}\cdot\frac{t}{3t^3}}$$

$$= \frac{t^2\left(1 - \frac{1}{3}\right)}{t^4 + \frac{1}{3}}$$

$$= \underline{\frac{2t^2}{3t^4 + 1}}$$ //

(3) (2)より．　　$t^2 > 0$ より．

$$\tan\beta = \frac{2}{3t^2 + \frac{1}{t^2}} \leqq \frac{2}{2\sqrt{3t^2\cdot\frac{1}{t^2}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

（分母に相加・相乗平均の関係を使った）

等号成立は．$3t^2 = \frac{1}{t^2}$ すなわち．$t = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ のとき．

$\therefore$ $\tan\beta$ が最大となるとき．$\underline{\beta = \frac{\pi}{6},\ t = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}}$ //