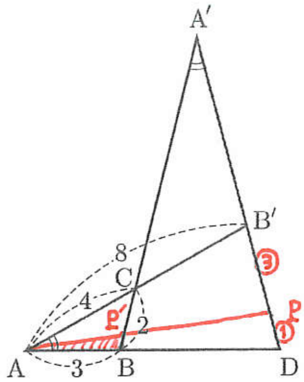
0002084185197999

三重大学

2015 年 医学部 第 2 問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 平面上の 3 点 A，B，C が，AB = 3，AC = 4，BC = 2 を満たしているとする．また B′ は A から C に向かう半直線上にあり，AB′ = 8 となる点とする．A′ は B から C に向かう半直線上にあり，BA′ > BC かつ ∠B′A′C = ∠BAC となる点とする．さらに A，B を通る直線と，A′，B′ を通る直線の交点を D とする．以下の問いに答えよ．



(1) DB と DB′ を求めよ．

(2) cos∠B′A′C の値を求めよ．また，それを用いて △A′B′C の面積を求めよ．

(3) P を線分 DB′ 上にあり，DP : PB′ = 1 : 3 となる点とする．また P′ を線分 AP と線分 BC との交点とする．△ABP′ の面積を求めよ．

(1) △ABC ∽ △A′B′C で BC : B′C = 2 : 4 = 1 : 2　∴ 相似比は 1 : 2

よって，A′C = 8，A′B′ = 6

また，△AB′D ∽ △A′BD で AB′ : A′B = 8 : 10 = 4 : 5　∴ 相似比は 4 : 5

∴ B′D : BD = 4 : 5　∴ $B'D = \frac{4}{5}BD$ …①

AD : A′D = 4 : 5　∴ (3 + BD) : (6 + B′D) = 4 : 5　∴ 5BD − 4B′D = 9 …②

①, ② より．$\underline{BD = 5,\ B'D = 4}$ //

(2) ∠B′A′C = ∠BAC より．

$\cos\angle B'A'C = \cos\angle BAC = \dfrac{3^2+4^2-2^2}{2\cdot3\cdot4} = \underline{\dfrac{7}{8}}$ //　∴ $\sin\angle B'A'C = \dfrac{\sqrt{15}}{8}$　∴ $\triangle A'B'C = \dfrac{1}{2}\cdot6\cdot8\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{8} = \underline{3\sqrt{15}}$ //

(3) メネラウスの定理より，$\dfrac{A'P}{PD}\cdot\dfrac{DA}{AB}\cdot\dfrac{BP'}{P'A} = 1$　∴ $\dfrac{9}{1}\cdot\dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{BP'}{P'A} = 1$

∴ BP′ : P′A = 1 : 24　∴ $BP' = 10\cdot\dfrac{1}{25} = \dfrac{2}{5}$，$P'C = \dfrac{8}{5}$　∴ BP′ : P′C = 1 : 4

$\triangle ABC = \dfrac{1}{2}\cdot3\cdot4\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{8} = \dfrac{3}{4}\sqrt{15}$　∴ $\triangle ABP' = \dfrac{3}{4}\sqrt{15}\cdot\dfrac{1}{5}$

$= \underline{\dfrac{3}{20}\sqrt{15}}$ //