0002305184967999

数理 石井K

2016年 薬学部 第2問

2 次の各設問に答えよ.

(1) $3n+9$ と $8n+9$ の最大公約数が5となるような20以下の自然数 n は [ア] 個ある. そのうち最も大きな n の値は [イウ] である.

(2) 曲線 $C: y=x^2-2ax+2a^2-5a$ (a は定数) は x 軸と異なる2点で交わるものとする. a の値の取り得る範囲は [エ] $<a<$ [オ] である.
そして, C と x 軸とで囲まれた領域の面積が $8\sqrt{6}$ のとき, a の値は小さい順に [カ], [キ] である.

3 17

0 5

2 3

(1) $3n+9$ が5の倍数となるのは, $n=2,7,12,17$ ← 1の位が0になるときと5になるときを調べる!

$8n+9$ が5の倍数となるのは, $n=2,7,12,17$

$n=2$ のとき, $3n+9$, $8n+9$ はそれぞれ, 15と25になり, 最大公約数は 5

$n=7$ のとき, 〃 30と65 〃 5

$n=12$ のとき, 〃 45と105 〃 15

$n=17$ のとき, 〃 60と145 〃 5

以上より, 条件をみたす n は 31個 〃 最大のものは $n=17$ 〃

(2) $y=(x-a)^2+a^2-5a$ 頂点は (a, a^2-5a)

∴ x 軸と異なる2点で交わるとき, $a^2-5a<0$

∴ $a(a-5)<0$ ∴ $0<a<5$ 〃

このとき, x 軸との交点の x 座標を α, β $(\alpha<\beta)$ とすると

$$8\sqrt{6}=\int_{\alpha}^{\beta}-(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \cdots (*)$$

ここで, 解と係数の関係より, $\alpha+\beta=2a$, $\alpha\beta=2a^2-5a$

∴ $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4a^2-4(2a^2-5a)=4(5a-a^2)$

∴ $\beta-\alpha>0$ より, $\beta-\alpha=2\sqrt{5a-a^2}$

これを (*) に代入して, $48\sqrt{6}=8(5a-a^2)^{\frac{3}{2}}$ ∴ $(\sqrt{6})^3=(\sqrt{5a-a^2})^3$

∴ $5a-a^2=6$ $(a-2)(a-3)=0$ ∴ $a=2,3$ 〃