# 自治医科大学

2015年 医学部 第21問

$\boxed{21}$ 関数 $f(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-t\cos x)^2\,dx$ は，$t=a$（$a$ は正の実数）で最小値をとるものとする．$a$ を超えない最大の整数の値を求めよ．

$$f(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2-2xt\cos x+t^2\cos^2 x\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,dx-2t\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx+t^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-2t\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x)'\,dx+t^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx$$

$$=\frac{\pi^3}{24}-2t\Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+2t\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx+t^2\left[\frac{x+\frac{1}{2}\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi^3}{24}-\pi t+2t\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+t^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}t^2+(2-\pi)t+\frac{\pi^3}{24}$$

$$=\frac{\pi}{4}\left\{t^2+\frac{4(2-\pi)}{\pi}t\right\}+\frac{\pi^3}{24}$$

$$=\frac{\pi}{4}\left\{t+\frac{2(2-\pi)}{\pi}\right\}^2-\frac{(2-\pi)^2}{\pi}+\frac{\pi^3}{24}$$

$$\therefore\ a=\frac{2(\pi-2)}{\pi}=2-\frac{4}{\pi}$$

ここで，$1<\frac{4}{\pi}<2$ より　$0<a<1$

$\therefore$ $a$ を超えない最大の整数は $\underline{0}$ //