0001644725538999

埼玉大学

2014年 教育・経済学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 関数 $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ は，$n=0,\ 1,\ 2,\ 3$ に対して，$f_n(0)$ が0に一致しないときか一致するときかという場合に応じて $f_{n+1}(x)$ を $f_n(x)$ から定める関係式

$$f_{n+1}(x)=\begin{cases}\dfrac{d}{dx}f_n(x) & (f_n(0)\neq 0)\\[2ex] \displaystyle\int_0^x f_n(t)\,dt+1 & (f_n(0)=0)\end{cases}$$

をみたしているとする．

(1) $f_0(x)=x$ のとき，$f_4(x)$ を求めよ．

(2) $f_1(x)=0$ ならば，$f_0(x)$ は定数であることを証明せよ．

(3) $f_2(x)=0$ ならば，$f_0(x)=ax+b$ (a, b は定数) と表されることを証明せよ．

(1) $f_1(x)=\int_0^x t\,dt+1=\dfrac{x^2}{2}+1$

$f_2(x)=x$

$f_3(x)=\int_0^x t\,dt+1=\dfrac{x^2}{2}+1$

$\underline{f_4(x)=x}$ //

(2) $f_1(x)=0$ かつ $f_0(x)$ は x の k 次式 ($k\geqq 1$) と仮定すると．

(i) $f_0(0)\neq 0$ の場合．$f_1(x)=\dfrac{d}{dx}f_0(x)=0$ ∴ $f_0(x)$ は定数 ($k=0$) となり矛盾．

(ii) $f_0(0)=0$ の場合．$f_1(x)=\int_0^x f_0(t)\,dt+1$

ここで，両辺を x で微分して，$0=f_0(x)-f_0(0)$

∴ $f_0(x)=0$ となり．これは定数なので矛盾．

(i)，(ii) より．$f_1(x)=0 \Rightarrow f_0(x)$：定数 ■

(3) (2) と同じ議論により．$f_2(x)=0 \Rightarrow f_1(x)$：定数．∴ $f_1(x)=a$ とおく．

(i)．$f_0(0)\neq 0$ のとき．$f_1(x)=\dfrac{d}{dx}f_0(x)$ ∴ $f_0(x)=ax+b$ と表される．

(ii) $f_0(0)=0$ のとき．$f_1(x)=\int_0^x f_0(t)\,dt+1$ 両辺 x で微分すると，

$0=f_0(x)-f_0(0)$

∴ $f_0(x)=0$

∴ これは $f_0(x)=ax+b$ の $a=b=0$ のときである．

(i)，(ii) より．$f_0(x)=ax+b$ と表される ■