岐阜大学

2014年 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ tは実数で$0<t<2$とする．図のように，1辺の長さが2の正四面体ABCDの辺AC上に点Pがあり，辺AD上に点Qがある．CP $=$ AQ $=t$のとき，以下の問に答えよ．

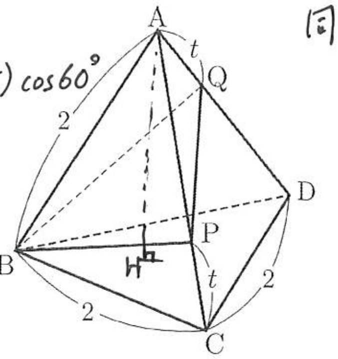
(1) 余弦定理より．

$BP^2=2^2+(2-t)^2-2\cdot2\cdot(2-t)\cos60^\circ$

$=t^2-4t+8-2(2-t)$

$=t^2-2t+4$

$\therefore BP=\sqrt{t^2-2t+4}$ //



同様に $PQ^2=(2-t)^2+t^2$

$-2\cdot t\cdot(2-t)\cos60^\circ$

$=2t^2-4t+4-(2t-t^2)$

$=3t^2-6t+4$

$\therefore PQ=\sqrt{3t^2-6t+4}$ //

$QB=\sqrt{t^2-2t+4}$ //

(1) 線分BP，PQ，QBの長さを，それぞれtを用いて表せ．

(2) tが$0<t<2$の範囲を変化するとき，三角形BPQの3辺の長さの和の最小値を求めよ．

(3) 三角錐ABPQの体積をtを用いて表せ．

(4) tが$0<t<2$の範囲を変化するとき，三角錐ABPQの体積の最大値を求めよ．

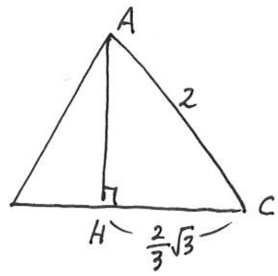
(2) 和をLとおくと (1)より $L=2\sqrt{(t-1)^2+3}+\sqrt{3(t-1)^2+1}$

$\therefore t=1$のとき Lは最小値 $2\sqrt{3}+1$ をとる //

(3) 三角錐ABPQ $=$ ABCD $\times\dfrac{2-t}{2}\times\dfrac{t}{2}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\dfrac{t(2-t)}{4}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{6}(2t-t^2)$ //



$AH^2=4-\dfrac{4}{3}=\dfrac{8}{3}$

$\therefore AH=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\triangle BCD=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}$

$\therefore ABCD=\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

(4) (3)より．

$ABPQ=-\dfrac{\sqrt{2}}{6}\left\{(t-1)^2-1\right\}$

$=-\dfrac{\sqrt{2}}{6}(t-1)^2+\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

$\therefore t=1$のとき．最大値 $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ //