2016年 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ a を実数とし，$f(x) = x^3 - 3ax$ とする．区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする．M の最小値とそのときの a の値を求めよ．

$$f(-x) = (-x)^3 - 3a\cdot(-x)$$
$$= -x^3 + 3ax$$
$$= -f(x)$$

よって，$f(x)$ は奇関数であるから，M は $0 \leqq x \leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値に等しい

$$f'(x) = 3(x^2 - a)$$

(i) $a \leqq 0$ のとき

$f'(x) \geqq 0$ より $f(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ において単調増加で，$f(0) = 0$，$f(1) = 1 - 3a > 0$

$\therefore M = 1 - 3a$

(ii) $0 < a \leqq 1$ のとき

x	0	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘		↗	$1-3a$

$$f'(x) = 3(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a})$$
$$f(\sqrt{a}) = -2a\sqrt{a}$$
$$|f(\sqrt{a})|^2 - |f(1)|^2 = (2a\sqrt{a})^2 - (1-3a)^2$$
$$= 4a^3 - 9a^2 + 6a - 1$$
$$= (a-1)^2(4a-1)$$

$\therefore$ $0 < a < \frac{1}{4}$ のとき $M = |f(1)| = |1-3a| = 1 - 3a$

$\frac{1}{4} \leqq a \leqq 1$ のとき $M = |f(\sqrt{a})| = |-2a\sqrt{a}| = 2a\sqrt{a}$

(iii) $a > 1$ のとき

$f'(x) < 0$ より $f(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ において単調減少で，$f(0) = 0$，$f(1) = 1 - 3a < 0$

$\therefore M = 3a - 1$

(i)〜(iii) より，

$$M = \begin{cases} 1 - 3a & \left(a < \frac{1}{4} \text{ のとき}\right) \\ 2a\sqrt{a} & \left(\frac{1}{4} \leqq a \leqq 1 \text{ のとき}\right) \\ 3a - 1 & (a > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$\therefore$ 右のようなグラフになり

M の最小値は $\frac{1}{4}$ $\left(a = \frac{1}{4} \text{ のとき}\right)$ //