

2010年第1問

 数理
石井K

1 次の問いに答えよ.

- (1) 方程式 $2^x = 3^{1-x}$ を解け.
 (2) $\cos 2\theta - 3\cos\theta + 2 = 0$ を満たす θ の値を求めよ. ただし, $0 \leq \theta < 2\pi$ である.
 (3) $x^2 - xy + y^2 = 1$ のとき, $x+y$ のとり得る値の範囲を求めよ.

(1) 両辺底2の対数をとると, $x = (1-x) \log_2 3$

$$\therefore (1 + \log_2 3)x = \log_2 3 \quad \therefore x = \frac{\log_2 3}{1 + \log_2 3} \quad \left(x = \frac{\log 3}{\log 6} \text{ など} \right)$$

底は何でもよい

(2) $2\cos^2\theta - 1 - 3\cos\theta + 2 = 0$

$$2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$$

$$\begin{matrix} 2 & \times & -1 \\ 1 & \times & -1 \end{matrix}$$

$$(2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 1) = 0$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{1}{2}, 1 \quad 0 \leq \theta < 2\pi \text{ より. } \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 0$$

(3) $x+y = k$ (k :実数) とおくと.

$$x^2 - x(k-x) + (k-x)^2 = 1$$

$$\therefore x^2 - kx + x^2 + k^2 - 2kx + x^2 - 1 = 0$$

$$3x^2 - 3kx + k^2 - 1 = 0$$

$$D \geq 0 \text{ より. } D = 9k^2 - 4 \cdot 3(k^2 - 1)$$

$$= -3k^2 + 12$$

$$\therefore -3k^2 + 12 \geq 0$$

$$\therefore -2 \leq k \leq 2$$

$$\therefore -2 \leq x+y \leq 2$$