2014年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 以下の問いに答えなさい.

次の数列 $\{a_m\}$ について，第 n 群が n 個の項を含むように分ける.

56 | 39, 24 | 11, 0, −9 | −16, −21, −24, −25 | −24, −21, −16, ⋯

−17 −15

(1) この数列の一般項 a_m を答えなさい.

(2) 第 n 群の最初の項を n を用いて表しなさい.

(3) 値がはじめて175以上となるのは，第何群の第何番目の項か，答えなさい.

(1) 階差数列 $\{b_m\}$ は $b_m = -17 + 2(m-1) = 2m - 19$ より.

$$a_m = 56 + \sum_{k=1}^{m-1} 2k - 19 = 56 + (m-1)m - 19(m-1)$$

$$\therefore a_m = 75 + m^2 - 20m = \underline{m^2 - 20m + 75}_{\,//}$$ (これは $m=1$ のときも成り立つ)

(2) 第 $n-1$ 群までに項は $\frac{1}{2}n(n-1)$ 項あるから.

$$a_{\frac{1}{2}n(n-1)+1} = \left\{\tfrac{1}{2}n(n-1)+1\right\}^2 - 20\left\{\tfrac{1}{2}n(n-1)+1\right\} + 75$$

$$= \frac{1}{4}n^2(n-1)^2 + 1 + n(n-1) - 10n(n-1) + 55$$

$$= \frac{1}{4}(n^4 - 2n^3 + n^2) + n^2 - n - 10n^2 + 10n + 56$$

$$= \underline{\frac{1}{4}(n^4 - 2n^3 - 35n^2 + 36n + 224)}_{\,//}$$

(3) $m^2 - 20m + 75 \geqq 175$ より $m^2 - 20m - 100 \geqq 0$

$\therefore$ $m > 0$ より. $m \geqq 10(1+\sqrt{2})$ これをみたす整数 m は $m \geqq 25$

$\therefore$ 最小の m は $m = 25$

$25 = \left(\sum_{k=1}^{6} k\right) + 4$ より. <u>第7群の第4番目の項</u> //